ECONOMETRIA Espacial APLICADA

Eduardo Almeida

Alínea
EDITORA

DIRETOR GERAL
Wilon Mazalla Jr.

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Willian F. Mighton

COORDENAÇÃO DE REVISÃO E COPYDESK
Catarina C. Costa

REVISÃO DE TEXTOS
Bianca Quiento Fernandes

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA
Fabio Diego da Silva
Tatiane de Lima

CAPA
Paloma Leslie

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Almeida, Eduardo
Econometria espacial aplicada / Eduardo Almeida. -- Campinas, SP : Editora Alínea, 2012.

Bibliografia

1. Econometria 2. Espaço na economia I. Título.

12-07510 CDD-330.015195

Índices para Catálogo Sistemático

1. Econometria espacial aplicada 330.015195

ISBN 978-85-7516-601-7

Todos os direitos reservados à

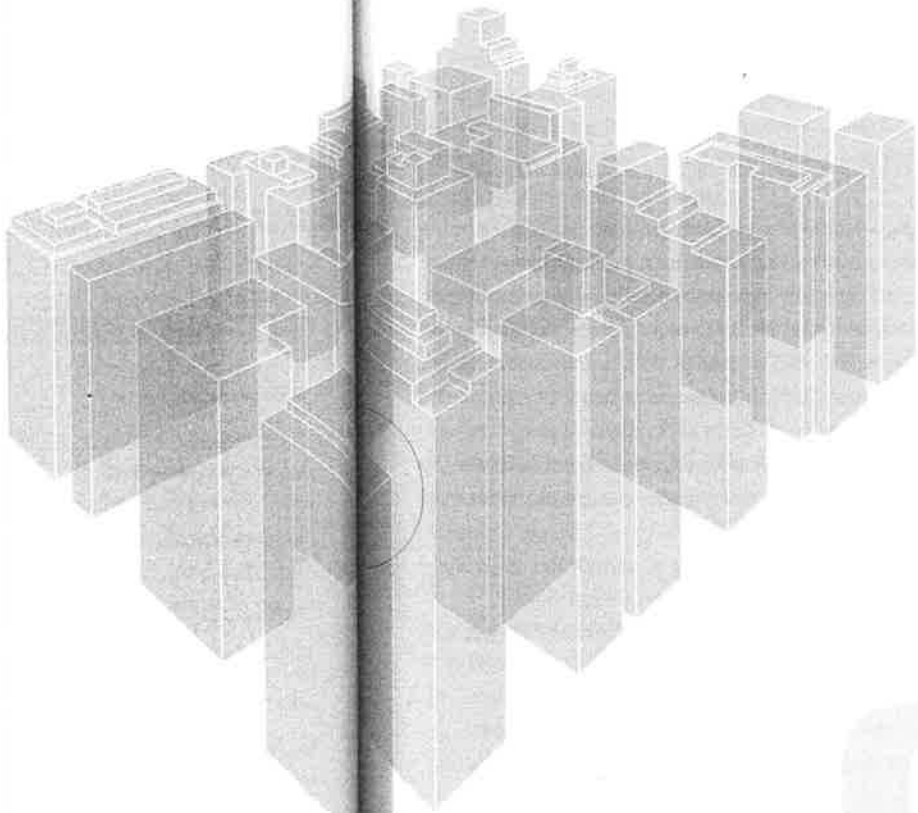
Editora Alínea

Rua Tiradentes, 1053 - Guanabara - Campinas-SP
CEP 13023-191 - PABX: (19) 3232.9340 e 3232.0047
www.atomoealinea.com.br

Impresso no Brasil

Apoio cultural

FAPEMIG
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais



06

Modelando a Dependência Espacial

The economy exists in and occupies space on the map; it is good that we have finally begun to acknowledge this in our models.

Paul Krugman (Prêmio Nobel de Economia)

5.1. Introdução

O modelo econométrico-espacial a ser especificado pelo pesquisador depende dos aspectos teóricos e empíricos que envolvem o processo espacial subjacente ao fenômeno em estudo. As defasagens espaciais que serão incorporadas no modelo de regressão a fim de capturar esses aspectos do processo tomam a forma de variáveis defasadas espacialmente, tais como Wy, WX, $W\xi$ e/ou $W\varepsilon$. Isoladamente ou em conjunto num mesmo modelo, são essas defasagens que dão conta de controlar a dependência espacial.

Por propósitos didáticos, a exposição é iniciada pelo modelo clássico de regressão linear que representa o processo a-espacial, ou seja, em que não se leva em consideração a influência dos efeitos espaciais:

$$y = X\beta + \varepsilon \qquad \varepsilon \sim Normal(0, \sigma^2 I_n) \tag{5.1}$$

em que y é um vetor n por 1 de observações sobre a variável dependente, X é uma matriz n por k de observações sobre as variáveis explicativas exógenas (mais a constante) com um vetor associado k por 1 de coeficientes de regressão β e ε é um vetor n por 1 de termos de erro aleatório, com média zero e variância constante.

Esquematicamente, na Figura 5.1, pode-se representar esse processo a-espacial como:

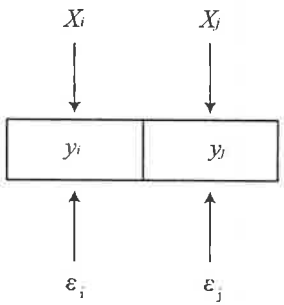


Figura 5.1. Processo a-espacial.
Fonte: Baller et al. (2001).

Nesse esquema simplificado, as regiões vizinhas i e j são denotadas por apenas dois retângulos contíguos. Observa-se que, nesta representação esquemática, não existe interação espacial entre as regiões. Em decorrência disso, a Equação 5.1 não incorpora nenhuma defasagem espacial. A hipótese de identificação da relação causal expressa na Equação 5.1 é que nenhuma variável explicativa esteja correlacionada com o termo de erro aleatório. Essa hipótese de identificação é trivial em regressões usando dados em corte transversal.

Neste capítulo é adotada uma taxonomia que é uma combinação das classificações propostas por vários autores, tais como Anselin (1988), Anselin e Bera (1998), Anselin (2003), Florax e Folmer (1992) e LeSage e Pace (2009), representando os principais modelos econométrico-espaciais usados com dados em corte transversal, encontrados em estudos aplicados. De acordo com essa taxonomia, um modelo econométrico-espacial envolve a incorporação de defasagens espaciais ao modelo expresso pela equação (5.1) a fim de se controlar para a dependência espacial. Os transbordamentos espaciais podem ter um alcance global ou local. As defasagens relacionadas aos processos espaciais aludidos acima podem assumir a forma de defasagem na variável dependente (Wy), defasagens nas variáveis independentes (WX) e/ou defasagem nos termos de erro ($W\xi$ ou $W\varepsilon$).[95]

Sempre que for pertinente, os modelos são apresentados na sua forma estrutural – ou seja, com variáveis explicativas endógenas e/ou exógenas no lado direito da equação –, assim como na sua forma reduzida. De acordo com Anselin (2003), a forma reduzida é a representação da regressão econométrico-espacial em que o lado direito contém apenas variáveis explicativas exógenas (X), o termo de erro (ε) e as transformações espaciais delas, tais como as defasagens espaciais de X, ξ e de ε (WX, $W\xi$ e $W\varepsilon$).

Neste capítulo, não se deve esquecer que se está considerando três coisas. Em primeiro lugar, a classificação dos modelos é válida para dados em corte transversal. Em segundo lugar, toda a discussão é feita num contexto de equação única. O tratamento da dependência espacial em sistemas simultâneos de equações, portanto, num contexto multiequacional, é reservado para o nono capítulo. Por fim, na próxima seção, é apresentada uma classificação dos principais modelos econométrico-espaciais tendo como foco o alcance da dependência espacial: global, se houver interação espacial entre todas as regiões do sistema ou local, se a interação se restringir apenas às regiões mais próximas (Anselin, 2003).

[95] Às vezes, na literatura, os modelos que incorporam as defasagens espaciais Wy e WX são denominados de modelos de dependência espacial substantiva, ao passo que os modelos que incorporam as defasagens espaciais referentes ao erro ($W\xi$ e $W\varepsilon$) são chamados de modelos de dependência espacial residual (Chasco, 2003).

Sempre que possível será fornecido um exemplo de aplicação, aludindo às ideias intuitivas subjacentes a cada modelo. Ademais, serão descritas as consequências para as estimativas, quando não se leva em conta as defasagens espaciais no modelo de regressão, bem como se fornecerá pistas para interpretar os coeficientes de um modelo espacial, tópico que recentemente a literatura econométrico-espacial passou a dedicar especial atenção (LeSage; Pace, 2009; Anselin; LeGallo, 2006; Kim et al., 2003). Portanto, neste capítulo, a preocupação é centrada em incorporar nos modelos a dependência espacial, deixando para outra oportunidade a incorporação da heterogeneidade espacial, o outro efeito espacial. É desnecessário dizer que é possível que haja a manifestação dos dois efeitos espaciais simultaneamente, o que será alvo de análise nos capítulos vindouros.

Além desta seção introdutória, o capítulo está estruturado da seguinte forma. A próxima seção apresenta uma classificação dos modelos espaciais, com alcance global da dependência espacial. Na terceira seção, é o momento de classificar os modelos espaciais de alcance local da dependência espacial. Na quarta seção, é exposta a classificação dos modelos que mostram tanto um alcance global quanto local da dependência espacial. A quinta seção expõe o modelo espacial geral, incluindo uma grande gama de defasagens espaciais. A derradeira seção faz um resumo e recupera os resultados de relevo apresentados ao longo do texto.

5.2 Modelos de dependência espacial de alcance global

Essa classe de modelos econométrico-espaciais é caracterizada por hospedar a dependência espacial cujo alcance do transbordamento é global pela interferência do multiplicador espacial que faz que um impacto sobre a variável dependente seja refletido para todas as regiões da área em estudo. O alcance global da dependência espacial refere-se à matriz de variância-covariância plena, fazendo que um impacto gerado para a variável dependente y numa região leve a uma transmissão deste impacto para o restante das regiões por intermédio do multiplicador espacial (Chasco, 2003).

5.2.1 Modelo de defasagem espacial ou modelo SAR

Suponha que uma inovação tecnológica que afeta a produção esteja se difundindo através das regiões por meio da imitação. Dessa forma, é preciso incluir

no modelo um termo para capturar tal efeito contido na imitação de uma inovação. Esquematicamente, o modelo SAR[96] pode ser representado como:

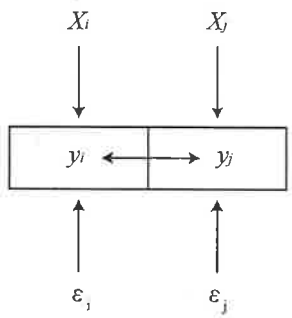


Figura 5.2. Processo de defasagem espacial.
Fonte: Baller et al. (2001).

Nessa representação simplificada, pode-se ver que a variável dependente nas regiões vizinhas i e j apresenta interação entre si. De acordo com LeSage e Pace (2009), agentes econômicos costumam tomar decisões correntes que são influenciadas pelo comportamento de outros agentes em períodos passados. Assim, esse modelo pode ser expresso na sua versão pura do seguinte modo:

$$y = \rho W y + \varepsilon \tag{5.2}$$

em que Wy é um vetor n por 1 de defasagens espaciais para a variável dependente, ρ é o coeficiente autorregressivo espacial. A restrição sobre o coeficiente de defasagem espacial ρ é de que se situe no intervalo aberto entre -1 e 1 ($|\rho| < 1$).[97]

Se o parâmetro espacial ρ for positivo, isso indica que existe autocorrelação espacial global positiva.[98] Em outros termos, um ρ positivo significa que um alto (baixo) valor de y nas regiões vizinhas aumenta (diminui) o valor de y na região i. Se o parâmetro ρ for negativo, isso sinaliza que há autocorrelação espacial global negativa.

[96] SAR é acrônimo, em inglês, para Spatial Auto Regressive. Este modelo foi pioneiramente proposto por Whittle (1954).

[97] De acordo com Anselin (2006), a restrição sobre o parâmetro espacial ρ não precisa ser tão estrita. A restrição sobre o coeficiente de defasagem espacial ρ é de que $(1/\omega_{max}) < \rho < (1/\omega_{min})$, em que ω_{min} e ω_{max} são, respectivamente, o menor e o maior autovalores da matriz de pesos espaciais W. Se a matriz W for normalizada na linha, a restrição é dada por: $(1/\omega_{max}) < \rho < 1$.

[98] Segundo Darmofal (2006), "o efeito de difusão corresponde a um positivo e significativo parâmetro sobre uma variável dependente defasada espacialmente, capturando a influência direta entre vizinhos" (p. 2).

Em outras palavras, isso sinaliza que um alto (baixo) valor de y nas regiões vizinhas diminui (aumenta) o valor de y na região i (Klier; McMillen, 2006). Caso o parâmetro espacial ρ não for estatisticamente significativo, pode-se considerar que o coeficiente é zero, não existindo, portanto, evidências de que haja autocorrelação espacial, quer seja positiva, quer seja negativa.[99]

O modelo SAR puro informa que a variável dependente y é influenciada por tal variável dependente, observada nas regiões vizinhas (Wy). Devido à multidirecionalidade da dependência espacial, a variável Wy é endógena, implicando que os valores de y nas regiões vizinhas influenciam a variável dependente num processo de causação circular. Se incluir o conjunto de variáveis explicativas exógenas X em (5.2), tem-se a versão mista do modelo SAR:

$$y = \rho Wy + X\beta + \varepsilon \tag{5.3}$$

em que X é uma matriz de variáveis explicativas exógenas e o restante da notação permanece o mesmo de antes. O modelo SAR misto, como expresso pela Equação 5.3, é especificado para que o valor da variável dependente observado numa determinada região seja determinado pela média dos valores da variável dependente observados na vizinhança (Wy), pelos valores das variáveis explicativas exógenas (X) e, ainda, sejam influenciados aleatoriamente por um termo de erro (ε).

A hipótese de identificação do modelo expresso em (5.3) é um pouco mais intrincada do que aquela em (5.1). Continua havendo a necessidade de não se ter nenhuma variável explicativa contida na matriz X correlacionada com o termo de erro aleatório. Mas, pela condição de multidirecionalidade dos processos espaciais, a variável dependente defasada espacialmente é endógena, ou seja, está correlacionada com o termo de erro aleatório. Assim, a identificação de (5.3) precisa reconhecer isso e solucionar esse problema de endogeneidade do componente Wy, escolhendo um método de estimação do modelo SAR que leve em consideração esta endogeneidade.[100]

Após algumas manipulações algébricas simples, é possível representar a Equação 5.3 na forma reduzida:

$$y = (I_n - \rho W)^{-1} X\beta + (I_n - \rho W)^{-1}\varepsilon \tag{5.4}$$

Nota-se que a matriz $(I_n - \rho W)$ precisa ser não singular para ser invertida. Para que se verifique a não singularidade, a matriz W precisa ter a propriedade de que a soma de suas linhas e colunas seja limitada a um número finito. A normalização da

[99] Se $\rho = 1$, o processo estocástico apresenta uma raiz unitária. As consequências disso são estudadas no capítulo quinze.

[100] A correta estimação de modelos espaciais é assunto para o Capítulo 6.

matriz W, por garantir que a soma de suas linhas e colunas esteja limitada ao tamanho da amostra,[101] evita a singularidade de $(I_n - \rho W)$. De acordo com Kelejian e Prucha (2010), essa propriedade garante que o processo espacial, representado pela Equação 5.4, exiba uma memória que é amortecida à medida que o grau de conectividade entre as regiões diminua. Essa propriedade limita, portanto, o grau da autocorrelação espacial, evitando-se o surgimento de comportamentos explosivos ou processos de memória persistente de choques no espaço.[102]

Para derivar o modelo SAR, expresso em (5.4), lembre-se que foi dito no início desta seção que a motivação para o surgimento de dependência espacial na forma de um modelo do tipo SAR são decisões tomadas no período corrente pelos agentes econômicos que foram influenciados por decisões de outros agentes em períodos prévios. Ou seja, a motivação é proveniente de uma dependência da interação entre agentes no tempo. Pode-se ver que a Equação 5.4 deriva-se de um processo gerador de dados que reflita isso (LeSage; Pace, 2009):

$$y_t = \rho W y_{t-1} + X\beta + \varepsilon_t \tag{5.5}$$

Mas nota-se que y_{t-1} no lado direito da equação pode ser expresso como:

$$y_{t-1} = \rho W y_{t-2} + X\beta + \varepsilon_t \tag{5.6}$$

Por sua vez, y_{t-2} pode ser escrito como:

$$y_{t-2} = \rho W y_{t-3} + X\beta + \varepsilon_t \tag{5.7}$$

e assim por diante. Substituindo recursivamente para y_{t-q}, tem-se que:

$$y_t = (I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \ldots + \rho^{q-1} W^{q-1})X\beta + \rho^q W^q y_{t-q} + \xi \tag{5.8a}$$

$$\xi = \varepsilon_t + \rho W \varepsilon_{t-1} + \rho^2 W^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho^{q-1} W^{q-1} \varepsilon_{t-(q-1)} \tag{5.8b}$$

em que W^q é uma matriz de pesos espaciais de q-ésima ordem. Uma vez que $E(\varepsilon_{t-r}) = 0$ para $\rho = 0$ até q-1, isso faz que $E(\xi) = 0$. Além disso, como $|\rho| < 1$, a magnitude do termo torna-se muito pequeno, podendo ser considerado como zero. Assim, no limite, é possível interpretar a relação expressa num modelo com dados em corte transversal como um equilíbrio de longo prazo do seguinte processo dinâmico:

[101] Como definido no terceiro capítulo, uma matriz de ponderação espacial normalizada na linha implica que a soma dos pesos de uma linha assume o valor unitário. Formalmente: $w_{ij}^* = w_{ij} / \sum_j w_{ij}$.

[102] Na presença de uma raiz unitária espacial, em que $\rho = 1$ na Equação 5.4, existe uma persistência na memória dos choques aleatórios, fazendo com que se tenha um impacto permanente no sentido de que mesmo regiões afastadas do epicentro do choque sofram seu efeito sem que haja amortecimento. A questão da raiz unitária espacial é vista no Capítulo 15.

$$\lim_{q \to \infty} E(y_t) = (I_n - \rho W)^{-1} X\beta \tag{5.9}$$

Então, a motivação para se ter um modelo SAR é o fato de representar um equilíbrio de longo prazo de um processo dinâmico, denotando decisões tomadas por agentes econômicos em períodos passados influenciando a decisão de agentes no período presente (LeSage; Pace, 2009).

Nos últimos tempos, houve um grande interesse na literatura pela interpretação dos coeficientes estimados em modelos espaciais (Anselin; Le Gallo, 2006; LeSage; Pace, 2009; LeSage, 2011). Isso ocorre porque a interpretação dos coeficientes β para um modelo espacial como o SAR torna-se mais rica e complicada ao mesmo tempo. A riqueza da interpretação surge porque um modelo de defasagem espacial, assim como outros modelos espaciais, consegue representar a estrutura de dependência envolvida na interação espacial entre as regiões (LeSage; Pace, 2009; LeSage, 2011). Para ver isso, observa-se que a expressão $(I_n - \rho W)^{-1}$ nas Equações 5.4 e 5.9 representa uma série infinita, envolvendo os erros em todas as regiões:

$$(I_n - \rho W)^{-1} = (I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \rho^3 W^3 + \ldots) \tag{5.10}$$

Essa série infinita pode ser considerada um multiplicador espacial, refletindo a simultaneidade da interação. A consequência disso é que a matriz $(I_n - \rho W)^{-1}$ é plena, implicando que cada região é autocorrelacionada com todas as outras, mas de forma que a intensidade da autocorrelação decresce por conta de que $|\rho| < 1$ (Anselin; Bera, 1998). Portanto, o alcance de um choque é global no sentido de que ele se propaga por todo o espaço.[103] No epicentro de ocorrência do choque, a sua intensidade é maior e, à medida que se distancia, tal intensidade perde força.

A interpretação dos coeficientes num modelo espacial pode ser mais complexo por conta desses efeitos indiretos e realimentadores entre as regiões em virtude da emergência de transbordamentos espaciais. Para se ter uma ideia mais clara disso, é interessante relembrar que num modelo clássico de regressão linear múltipla, por conta da hipótese da linearidade e da independência dos erros, o coeficiente β tem uma interpretação direta, uma vez que é a derivada parcial da variável dependente na região i com respeito à variável explicativa X_k (LeSage; Pace, 2009):

$$\beta_k = \frac{\partial y_i}{\partial X_{ik}} \tag{5.11}$$

[103] No espaço, Wy está, neste caso, correlacionado com todos os ε, nas regiões (Anselin; Bera, 1998).

Nessa situação em que não existem transbordamentos espaciais e as regiões são independentes entre si, só existe o efeito direto da variável explicativa k na região i influenciando a variável dependente na região i, pois o efeito marginal cruzado de X_{kj} sobre y_i é igual a zero ($\partial y_i / \partial X_{kj} = 0$). No entanto, quando se admite a existência de transbordamentos espaciais, a interpretação deixa de ser tão direta porque ganha uma riqueza de informações sobre as inter-relações e efeitos realimentadores que tomam lugar nessa situação. Um efeito realimentador funciona desse jeito: a variável explicativa k na região i influencia as regiões vizinhas que influenciam, por sua vez, a variável dependente. Existe outro canal de transmissão da influência que reside em que a variável explicativa k em i influencia as regiões vizinhas que, por sua vez, impactam a região i, que influenciará posteriormente a variável dependente da região i. Porém, a riqueza de informação cobra o seu preço: aumenta a dificuldade em interpretar os coeficientes estimados por determinados modelos espaciais. De acordo com LeSage e Pace (2009), num modelo espacial do tipo SAR, uma mudança na variável explicativa numa região afetará não apenas a própria região pelo efeito direto, mas pode afetar o valor da variável dependente em todas as regiões por meio do efeito indireto. O efeito marginal total é a soma dos efeitos marginais diretos e indiretos proporcionados por esta mudança e pela realimentação que ocorre através das regiões.

Por reconhecer os efeitos marginais diretos e indiretos, recentemente, a literatura de econometria espacial está admitindo que a interpretação dos coeficientes em modelos que contenham a defasagem espacial da variável dependente (Wy) precisa ser cuidadosa. No modelo de defasagem espacial, uma matriz de derivadas diretas e parciais, de dimensão n por n, assume outra forma, totalmente diferente, conforme as expressões:

$$\frac{\partial y_i}{\partial X_{kj}} = (I_n - \rho W_n)^{-1} I_n \beta_k \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial X_{kj}} = (I_n + \rho W + \rho^2 W^2 + \rho^3 W^3 + \cdots) I_n \beta_k \tag{5.13}$$

Pela expressão, percebe-se que a influência da variável k em uma região i (X_{ki}) sobre a variável dependente na região i depende de efeitos diretos e indiretos. Os efeitos indiretos são interpretados como transbordamentos espaciais, que são definidos como as derivadas marginais cruzadas diferentes de zero ($\partial y_i / \partial X_{kj} \neq 0$), que mostram como mudanças em características ou resultados de uma região influenciam os resultados de outras regiões.

A derivada parcial cruzada fornece a influência de uma mudança da variável explicativa k na região vizinha j sobre a variável dependente na região i. A título

de exemplo para fins didáticos, vamos considerar um modelo SAR de análise de convergência absoluta entre as cinco macrorregiões brasileiras (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul). A matriz de derivadas parciais diretas e cruzadas, neste exemplo, assume a seguinte expressão:

$$\frac{\partial y_i}{\partial X_{1j}} = (I_n - \rho W)^{-1} I_n \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_N}{\partial X_{1N}} & \frac{\partial y_N}{\partial X_{1NE}} & \frac{\partial y_N}{\partial X_{1CO}} & \frac{\partial y_N}{\partial X_{1SE}} & \frac{\partial y_N}{\partial X_{1S}} \\ \frac{\partial y_{NE}}{\partial X_{1N}} & \frac{\partial y_{NE}}{\partial X_{1NE}} & \frac{\partial y_{NE}}{\partial X_{1CO}} & \frac{\partial y_{NE}}{\partial X_{1SE}} & \frac{\partial y_{NE}}{\partial X_{1S}} \\ \frac{\partial y_{CO}}{\partial X_{1N}} & \frac{\partial y_{CO}}{\partial X_{1NE}} & \frac{\partial y_{CO}}{\partial X_{1CO}} & \frac{\partial y_{CO}}{\partial X_{1SE}} & \frac{\partial y_{CO}}{\partial X_{1S}} \\ \frac{\partial y_{SE}}{\partial X_{1N}} & \frac{\partial y_{SE}}{\partial X_{1NE}} & \frac{\partial y_{SE}}{\partial X_{1CO}} & \frac{\partial y_{SE}}{\partial X_{1SE}} & \frac{\partial y_{SE}}{\partial X_{1S}} \\ \frac{\partial y_S}{\partial X_{1N}} & \frac{\partial y_S}{\partial X_{1NE}} & \frac{\partial y_S}{\partial X_{1CO}} & \frac{\partial y_S}{\partial X_{1SE}} & \frac{\partial y_S}{\partial X_{1S}} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Neste exemplo, y é uma medida de crescimento econômico, tal como a taxa de variação da renda *per capita* em um certo período, enquanto X_1 é a renda *per capita* no período inicial. A Matriz (5.14) informa detalhadamente os efeitos de transbordamentos proporcionados pela dependência espacial entre as regiões. O efeito marginal direto da renda inicial (X_1) da região Norte sobre a taxa de variação da renda *per capita* (y) da própria região Norte é dado pela derivada parcial (∂y_N / ∂X_{1N}), localizada na diagonal principal da matriz. Como existem vários efeitos marginais diretos, define-se um efeito direto médio que simplesmente representa a média dos efeitos marginais diretos, ou seja, a média dos elementos da diagonal principal da Matriz (5.14).

Os efeitos indiretos representando transbordamentos espaciais são denotados pelas derivadas parciais cruzadas, ou seja, pelos termos fora da diagonal principal da Matriz (5.14). Deste modo, é possível fazer análises regionalizadas destes transbordamentos espaciais. Por exemplo, o efeito indireto da renda inicial do Centro-Oeste sobre o crescimento econômico do Sudeste é representado pela derivada parcial cruzada $\partial y_{SE} / \partial X_{1CO}$. As somas das colunas da Matriz (5.14) possuem interpretações interessantes. Para saber qual é o impacto total da renda inicial do Sudeste sobre o crescimento de todas as outras regiões brasileiras, basta calcular a soma dos elementos da quarta coluna. Isso é chamado de ***impacto total proveniente de uma região***. Se quisermos saber apenas qual é o ***impacto médio*** da renda inicial do Sudeste sobre o restante do Brasil, é preciso apenas tirar uma média dos elementos da quarta coluna.

Por outro lado, pode-se estar interessado em saber qual é o impacto total sobre o crescimento econômico de uma região em decorrência do montante das rendas iniciais de todas as regiões, inclusive a própria região em questão. Este resultado é obtido pela soma de uma linha específica da Matriz 5.14. Por exemplo, o impacto total sobre o crescimento econômico para a região Sul como resultante das rendas iniciais de todas as regiões é apurado pela soma da última linha da Matriz 5.14. Novamente, se quisermos conhecer apenas um impacto médio sobre o crescimento para o Sul a partir da influência das rendas iniciais das regiões, computa-se a média dos elementos da última linha. Este efeito é denominado de impacto médio para uma região.

O efeito indireto total informa a influência agregada de todos os transbordamentos espaciais, e este resultado é denotado pela soma de todas as derivadas parciais cruzadas, isto é, a soma de todos os elementos fora da diagonal principal da matriz 5.14. Para se ter um efeito indireto médio basta calcular a média destes elementos representando as derivadas parciais cruzadas.

Como derivado em Lesage e Pace (2009), para o modelo de defasagem espacial, o efeito marginal total (efeitos marginais diretos e indiretos), de uma variável explicativa k (X_k) sobre a variável dependente y é $(1-\rho)^{-1}\beta_k$. Nota-se que esse multiplicador espacial global $(1-\rho)^{-1}$ é comum para todas as variáveis explicativas.

Ainda no que diz respeito ao modelo de defasagem espacial misto (incluindo as variáveis explicativas exógenas, X), vale a pena ver as consequências para as estimativas de se não levar em conta a defasagem espacial na equação. Neste caso, incorre-se no problema econométrico de omissão de variável relevante, viesando as estimativas $\hat{\beta}$ que acompanham as variáveis explicativas exógenas. Para ver isso, considera-se que o verdadeiro processo estocástico gerador de dados deve ser representado por um modelo de defasagem espacial:

$$y = \rho W y + X\beta + \varepsilon \tag{5.15}$$

Contudo, se o pesquisador não levar em conta a defasagem espacial, o modelo a ser estimado erroneamente é:

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{5.16}$$

O estimador MQO de β é:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \tag{5.17}$$

Substituindo y, como expresso por (5.15), em (5.17):

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + \rho(X'X)^{-1}X'Wy + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \quad \textbf{(5.18a)}$$

$$\hat{\beta} = \beta + \rho(X'X)^{-1}X'Wy + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \quad \textbf{(5.18b)}$$

Passando o operador esperança em (5.18b):

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \rho(X'X)^{-1}E(X'Wy) + (X'X)^{-1}E(X'\varepsilon) \quad \textbf{(5.18c)}$$

Como, pela hipótese da exogeneidade, a variável explicativa não está correlacionada com o termo de erro aleatório $E(X'\varepsilon)$, o último termo é zero. A estimativa de β só será não viesada em dois casos. Em primeiro lugar, se não houver correlação entre X e a defasagem espacial $[E(X'Wy) = 0]$. Em segundo lugar, se o processo estocástico for não espacial, tem-se o caso trivial em que $\rho = 0$. Como é muito provável que $E(X'Wy) \neq 0$, ou seja, que a variável explicativa esteja correlacionada com a defasagem espacial da variável dependente (Wy), a estimativa de β é tendenciosa. A fonte do viés é oriunda do fato de se ter omitido na regressão uma variável relevante (Wy), que era requisitada pelo processo estocástico gerador dos dados do tipo espacial. A pior notícia é que esse viés do estimador não desaparece quando o tamanho da amostra cresce ao infinito, ou seja, o estimador, nesse caso, não possui a propriedade assimptótica da consistência, pois ela depende de que a correlação entre X e a defasagem espacial (Wy) seja nula. Independente do número de variáveis explicativas na regressão, para haver viés de variável relevante omitida basta que a defasagem espacial da variável dependente (Wy) esteja correlacionada com uma única variável explicativa.

Para observar outra consequência do modelo SAR, é relevante analisar mais detidamente a estrutura de variância-covariância do modelo de defasagem espacial:

$$E(\xi\xi') = \sigma^2[(I_n - \rho W)'(I_n - \rho W)]^{-1} \quad \textbf{(5.19)}$$

A Equação 5.19 fornece um exemplo da imbricação da autocorrelação espacial com a heterogeneidade espacial. Mais especificamente, a existência de autocorrelação espacial induzindo heterocedasticidade. A condição de matriz plena implica uma simultaneidade da interação espacial que traz uma clara implicação no momento da estimação. Ademais, a matriz de variância-covariância do modelo SAR apresenta a diagonal principal composta por elementos não constantes em decorrência da presença da autocorrelação espacial. Convém ressaltar que essa heterocedasticidade induzida pela autocorrelação espacial ocorre independente do fato do termo de erro

aleatório ser bem comportado, com média zero e variância constante. Evidentemente, se a autocorrelação espacial for controlada no modelo de regressão, a evidência de heterocedasticidade espúria contida nos resíduos desaparece, uma vez que autenticamente o termo de erro aleatório é homocedástico, isto é, $\varepsilon \sim (0, \sigma^2 I_n)$.

5.2.2 Modelo de erro autorregressivo espacial[104] ou modelo SEM

Um exemplo deste processo espacial é considerar a influência de uma praga na lavoura numa função de produção agrícola. O alastramento da praga, um efeito não modelado com padrão espacial, não influencia as variáveis explicativas da função de produção (trabalho, capital etc.), mas influencia a variável dependente. Neste modelo, a dependência espacial é residual, caracterizada pela estrutura autorregressiva de primeira ordem no termo de erro. O significado intuitivo desse modelo é que o padrão espacial manifestado no termo de erro é dado por efeitos não modelados por conta da falta de adequada medida, que, por sua vez, não são distribuídos aleatoriamente no espaço, mas, ao contrário, estão espacialmente autocorrelacionados. Uma característica importante de se ressaltar é que esses efeitos não modelados não podem estar correlacionados com nenhuma variável explicativa da regressão. Por meio da Figura 5.3, tem-se a representação esquemática desse modelo:

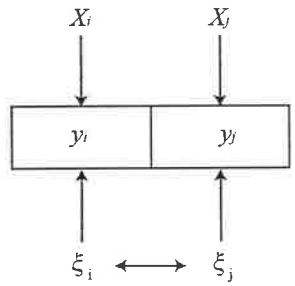


Figura 5.3. Processo de erro autorregressivo espacial.
Fonte: Baller et al. (2001).

A Figura 5.3 representa que o erro da região i está correlacionado com o erro na região j. A dependência espacial no modelo SEM manifesta-se agora no termo de

[104] Esse modelo foi introduzido por Ord (1975). É conhecido também apenas como modelo de erro espacial (*spatial error model*).

erro e não na variável dependente. Pode-se expressar formalmente o modelo SEM, contendo o erro espacial autorregressivo de primeira ordem como abaixo:

$$y = X\beta + \xi \tag{5.20a}$$

$$\xi = \lambda W\xi + \varepsilon \tag{5.20b}$$

no qual o coeficiente λ é o parâmetro do erro autorregressivo espacial que acompanha a defasagem $W\xi$. Nesse modelo, os erros associados com qualquer observação são uma média dos erros nas regiões vizinhas mais um componente de erro aleatório, conforme expresso pela Equação 5.20b.

Após algumas manipulações algébricas, a forma reduzida do modelo pode ser representada por:

$$y = X\beta + (I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon \tag{5.21}$$

É preciso que a matriz $(I_n - \lambda W)$ não seja singular. Novamente, para que isso seja garantido, a matriz W precisa atender à propriedade de que a soma de suas linhas e colunas seja limitada a um número fixo.[105] Desde que $|\lambda| < 1$, outro multiplicador espacial aparece na expressão (5.21) da seguinte forma:

$$[I_n - \lambda W]^{-1} = I_n + \lambda W + \lambda^2 W^2 + \ldots \tag{5.22}$$

Dada a incapacidade de se modelar toda a fonte de dependência espacial oriunda do processo estocástico gerador dos dados espaciais, a parte da dependência não modelada se manifesta no padrão do erro aleatório entre regiões vizinhas, na forma de que os erros sejam autocorrelacionados espacialmente (Darmofal, 2006). Além de ser o reflexo de efeitos não modelados que exibem padrão espacial, o modelo de erro espacial pode informar que a influência sobre a variável dependente não é resultado apenas do choque, representado pelo termo de erro, específico a uma região, mas também de transbordamentos de choques de regiões mais conectadas ou menos conectadas pela matriz W, como expresso pelo termo da Equação 5.21, $(I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon$ (Rey; Montouri, 1999; Fingleton; López-Bazo, 2006). A variável dependente y é influenciada pelos choques vindos de todas as outras regiões, isto é, do sistema como um todo. Com base no multiplicador espacial, percebe-se o alcance de um choque é global, fazendo com que haja uma propagação do efeito ao longo do sistema, atingindo todas as regiões, mas com uma intensidade decrescente à medida que se afasta do epicentro da ocorrência da inovação em decorrência de $|\lambda| < 1$. Um choque na região i afeta os vizinhos e os vizinhos dos vizinhos por intermédio das potências

[105] Uma matriz de ponderação espacial W normalizada na linha atende a essa propriedade.

de W, e, eventualmente, volta para afetar a região i de novo, porém, agora, com o efeito amortecido.[106] O efeito total de um choque não é apenas o choque que ocorreu em determinada região, mas também o efeito realimentador proveniente das outras regiões afetadas pelo choque original (Fingleton, 2008).

As implicações para os coeficientes estimados são claras. Os erros desse modelo não serão esféricos, ou seja, homocedásticos e independentes espacialmente. Para ver isso, é preciso definir a estrutura de variância-covariância do erro:

$$E(\xi\xi') = \sigma^2[(I_n - \lambda W)'(I_n - \lambda W)]^{-1} \tag{5.23}$$

Semelhantemente à estrutura de variância de y do modelo de defasagem espacial, a matriz de variância-covariância do erro é plena, ou seja, todas as regiões são correlacionadas entre si. Contudo, as que estão mais próximas, estão correlacionadas mais intensamente.

No modelo SEM expresso em (5.20), a matriz de variância-covariância das estimativas MQO é dada por:

$$Var(\hat{\beta}) = E(\xi\xi')(X'X)^{-1} = \sigma^2[(I_n - \lambda W)'(I_n - \lambda W)]^{-1}(X'X)^{-1}$$

Percebe-se claramente que essa matriz de variância-covariância é bem diferente da matriz do modelo MCRL a-espacial $(Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1})$. Isso faz com que as variâncias das estimativas sejam viesadas, bem como os seus erros padrão, tornando-as ineficientes.

Assim como aconteceu com o modelo SAR, a complexa estrutura da Equação 5.23 produz elementos da diagonal principal que não são constantes, a despeito da homocedasticidade de ε, uma vez que a Equação 5.23 é diferente de $\sigma^2 I_n$. Somente no caso trivial em que λ assuma o valor nulo, os erros não serão autocorrelacionados no espaço. Esse é mais um exemplo da imbricação da autocorrelação espacial com a heterogeneidade espacial, sendo que, neste caso, trata-se da autocorrelação espacial induzindo heterocedasticidade.

No modelo SEM, a interpretação dos coeficientes β não é afetada, permanecendo inalterada. Em outros termos, cada β é entendido como o efeito marginal da forma costumeira encontrada nos manuais de econometria, como sendo a derivada parcial de y em relação à variável explicativa em questão:

$$\beta_k = \frac{\partial y_i}{\partial X_{ik}} \tag{5.24}$$

[106] Convém notar a importância de que $|\lambda| < 1$. Caso esta restrição não seja respeitada, o comportamento dos choques fica explosivo e instável por causa do fato de que os choques nos vizinhos não se dissipam ao longo do espaço.

Assim, o efeito marginal total da mudança na variável X_k sobre y é captado pelo coeficiente β_k.

5.2.3. Modelo de defasagem espacial com erro autorregressivo espacial ou modelo SAC[107]

O fenômeno a ser modelado, às vezes, pode requerer que a dependência espacial subjacente seja mais intrincada, manifestada tanto na forma substantiva de uma defasagem da variável dependente quanto na forma de erros autocorrelacionados espacialmente. A título de exemplo, considera-se o caso em que há um processo de difusão de uma nova técnica agrícola, concomitantemente com a presença de um efeito não modelado, como uma praga na lavoura, exibindo um padrão espacial, que se espalhe por todas as regiões, porém, com uma intensidade de contágio decrescente, indicada por $|\lambda| < 1$. Convém observar que a praga, neste caso, não está correlacionada com nenhuma variável explicativa. Esse modelo pode ser representado esquematicamente como:

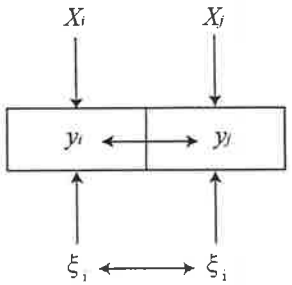


Figura 5.4. Processo de defasagem com erro autorregressivo.
Fonte: Baller et al. (2001).

No esquema, percebe-se que, através das regiões vizinhas i e j, há interação na variável de interesse (y) e no erro (ξ). Para representar isso formalmente, é preciso incluir no modelo (5.1) uma defasagem espacial e um termo de erro espacialmente dependente (Kelejian; Prucha, 1998):

$$y = \rho W_1 y + X\beta + \xi \tag{5.25a}$$

[107] Esse modelo é também denominado de SARAR por Fingleton (2008) e por SARAR(1,1) por Kelejian e Prucha (2010).

$$\xi = \lambda W_2 \xi + \varepsilon \tag{5.25b}$$

A fim de se evitar comportamento instável, as restrições sobre os parâmetros espaciais exigem que $|\rho| < 1$ e $|\lambda| < 1$. Cabe notar que W_1 e W_2 podem ser matrizes com pesos espaciais diferentes, constituindo um caso mais geral. A forma reduzida do modelo (5.25) revela que:

$$y = (I_n - \rho W_1)^{-1} X\beta + (I_n - \rho W_1)^{-1}(I_n - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon \tag{5.26}$$

Ou a forma estrutural:

$$y = \rho W_1 y + \lambda W_2 y - \lambda\rho W_2 W_1 y + X\beta - \lambda W_2 X\beta + \varepsilon \tag{5.27}$$

Por envolver claramente um multiplicador espacial, o alcance do efeito sobre as variáveis explicativas (X) é global, afetando todo o sistema. Contudo, como apontado por Anselin (2003), o padrão induzido de dependência espacial do termo de erro é mais complexo e de difícil interpretação por conta do multiplicador espacial. Para o modelo SAC, um choque na região j afeta todas as outras regiões por intermédio do multiplicador espacial do processo SAR da defasagem espacial, amplificado pelo efeito multiplicador extra proporcionado pelo processo de erro espacial (Fingleton, 2008). A matriz de variância-covariância nesse modelo assume a forma:

$$E(\xi\xi') = \sigma^2 (I_n - \rho W_1)^{-1}(I_n - \lambda W_2)^{-1}(I_n - \lambda W_2')^{-1}(I_n - \rho W_1')^{-1} \tag{5.28}$$

Como se pode observar em (5.28), além dos erros serem autocorrelacionados espacialmente, eles são heterocedásticos.

Um problema que pode ocorrer com o modelo (5.27), principalmente quando se adotam matrizes de contiguidade, é ocorrência de redundâncias e circularidades induzidas nos pesos espaciais por causa do operador de defasagem espacial do tipo $W_2 W_1$.[108] Essa pode ser uma matriz de contiguidade de ordem superior que inclui vizinhos de ordem inferior. Isto pode afetar as propriedades dos estimadores e deveria ser evitado (Anselin, 2006).

Para se evitar as redundâncias ou circularidades, é preciso assegurar que o produto das matrizes de ponderação espacial seja $W_1 \cdot W_2 = 0$. Nesse caso, a

[108] Uma matriz de contiguidade de segunda ordem deveria incluir apenas vizinhos de segunda ordem como seus elementos. Ocorrem redundâncias ou circularidades quando esta matriz de segunda ordem inclui, além dos vizinhos de segunda ordem, vizinhos de primeira ordem. Esses vizinhos de primeira ordem nesta matriz são considerados redundantes.

Equação 5.27 transforma-se no modelo de defasagem espacial biparamétrico,[109] porém, com restrições nos parâmetros:

$$y = \rho W_1 y + \lambda W_2 y + X\beta - \lambda W_2 X\beta + \varepsilon \qquad (5.29)$$

O modelo de defasagem espacial biparamétrico sem restrições é expresso como:

$$y = \rho_1 W_1 y + \rho_2 W_2 y + X\beta + \varepsilon \qquad (5.30)$$

A identificação dos dois parâmetros de defasagem espacial é permitida pelas matrizes de pesos espaciais diferentes. A forma reduzida do modelo biparamétrico é:

$$y = (I_n - \rho_1 W_1 - \rho_2 W_2)^{-1} X\beta + (I_n - \rho_1 W_1 - \rho_2 W_2)^{-1} \varepsilon \qquad (5.31)$$

Na prática, costuma-se usar as mesmas matrizes W para se construir a defasagem espacial da variável dependente quanto à defasagem do erro, ou seja, $W_1 = W_2$:

$$y = (\rho + \lambda) Wy - \rho\lambda W^2 y + X\beta - \lambda WX\beta + \varepsilon \qquad (5.32)$$

Se o vetor dos coeficientes β for nulo, esse modelo não é identificado. Agora mesmo que alguns coeficientes β sejam diferentes de zero, a dificuldade na identificação dos parâmetros ρ e λ pode permanecer (Anselin, 2006).

A forma reduzida revela que esse modelo implica um alcance global do efeito da interação espacial. A consequência de não incorporar os componentes Wy e $W\xi$, quando relevantes, são estimativas viesadas e ineficientes em amostras finitas e inconsistentes, em grandes amostras.

Convém notar que, para o modelo (5.25) em que as matrizes W são diferentes, a interpretação dos coeficientes de inclinação β é similar à interpretação dos coeficientes para o modelo de defasagem espacial. Vale a pena recordar que o impacto total de uma variável explicativa X_k sobre y é $(1 - \rho)^{-1}\beta_k$.

5.3. Modelos de dependência espacial de alcance local

Para tal classe de modelos econométrico-espaciais, o alcance da dependência espacial é localizado no sentido de que o impacto da dependência espacial seja observado para apenas algumas regiões da área em estudo, sobretudo os vizinhos diretos e os vizinhos indiretos de segunda ordem, ou seja, vizinhos dos vizinhos.

[109] O modelo SAR biparamétrico foi proposto por Brandsma e Ketellapper (1979).

5.3.1. Modelo de erro de média móvel espacial ou modelo SMA[110]

Considera-se que uma fábrica, localizada numa região, jogue poluentes no ar ou despeje efluentes no rio, prejudicando a produção agrícola não apenas da região onde se localiza a planta industrial, mas também das regiões vizinhas próximas, mas não de todas as regiões. Como a poluição é um efeito não modelado na regressão por falta de uma medida adequada, isso se manifesta no termo de erro. À semelhança do modelo anterior, essa representação da interação espacial envolve a incorporação de efeitos não modelados, porém, agora com uma influência mais localizada, em contraste com o modelo SEM. De acordo com Fingleton (2008), a lógica de assumir um processo de média móvel espacial é que em alguns casos pode ser mais realístico tratar a transmissão de choques como um fenômeno local em vez de global (p. 36).

Três coisas são importantes de serem notadas. Em primeiro lugar, este efeito não modelado é autocorrelacionado espacialmente, mostrando um padrão de concentração ou de dispersão. Em segundo lugar, tal efeito não modelado não está correlacionado com nenhuma variável explicativa. Em terceiro lugar, esse efeito tem uma influência de alcance localizado. Tal modelo pode ser representado esquematicamente pela Figura 5.5, em que se observa que o erro aleatório da região i influencia o erro aleatório da região j e vice-versa.

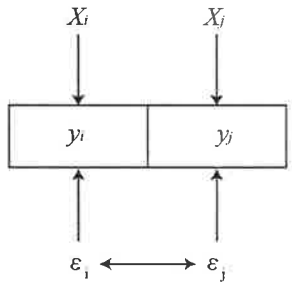


Figura 5.5. Processo de erro de média móvel espacial.
Fonte: Elaboração própria a partir de Baller et al. (2001).

Neste modelo SMA, o erro espacial segue um processo de média móvel de primeira ordem, especificado da seguinte maneira:

$$y = X\beta + \xi \qquad (5.33a)$$

[110] SMA é acrônimo de Spatial Moving Average. Tal modelo foi proposto por Haining (1978).

$$\xi = \gamma W\varepsilon + \varepsilon \tag{5.33b}$$

em que γ é o coeficiente de média móvel espacial, sendo que os termos restantes são definidos como antes. Para evitar comportamento explosivo nos erros, é necessário impor a restrição de que o parâmetro espacial γ se situe no intervalo aberto entre -1 e 1. A interpretação para o coeficiente de média móvel espacial γ é de que a influência de efeitos não modelados tem um impacto localizado sobre a vizinhança. Convém observar que o erro é composto pelo choque na própria região (ε) e pela média dos choques das regiões vizinhas ($W\varepsilon$). A forma reduzida desse modelo é a seguinte:

$$y = X\beta + (I_n + \gamma W)\varepsilon \tag{5.34}$$

É interessante ressaltar que agora não aparece na forma reduzida nenhum termo que denote o multiplicador espacial. Consequentemente, o alcance do choque, neste modelo, é local, não tendo impacto sobre todo o sistema. Para se observar até onde vai o impacto localizado é necessário analisar a matriz de variância-covariância do erro desse modelo, que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} E[\xi\xi'] &= \sigma^2[(I_n + \gamma W)(I_n + \gamma W)] \\ &= \sigma^2[I_n + \gamma(W + W') + \gamma^2 WW'] \end{aligned} \tag{5.35}$$

Nota-se que a matriz de variância-covariância não é plena, neste caso, desde que os elementos não nulos fora da diagonal principal são apenas os correspondentes aos elementos de W e WW'. Ou seja, tais elementos não nulos consistem de pares de regiões que são somente vizinhos de primeira e segunda ordem, denotando os erros autocorrelacionados espacialmente (Anselin; Bera, 1998). Pode-se considerar que o processo de erro de média móvel induz um efeito de transbordamento do erro localizado apenas para os vizinhos de primeira e de segunda ordem, sendo assim, de menor alcance do que o modelo SEM, com um termo de erro espacial autorregressivo, visto na Seção 5.2.2.[111]

A consequência para a estimação é clara quando não se incorpora essa defasagem espacial: os coeficientes estimados serão ineficientes, porém não são viesados.

[111] Segundo Florax e Graaff (2004), "o processo de média móvel é diferente do processo autorregressivo, entre outras coisas, porque os efeitos espaciais estendem para todas as regiões no sistema espacial para o processo de erro autorregressivo, mas são limitados para os vizinhos de primeira e de segunda ordem no modelo de média móvel" (p. 35).

Cabe destacar que, nesse modelo, novamente, a autocorrelação espacial induz heterocedasticidade, uma vez que os termos diagonais em WW' não serão constantes, a despeito da homocedasticidade do termo de erro ε.

Semelhantemente ao que ocorreu com a análise do modelo de erro espacial (SEM), cabe frisar que a interpretação dos β nesse modelo é a rotineira, ou seja, cada β representa o efeito marginal de uma variável explicativa correspondente sobre a variável dependente y. Isso decorre do fato que não aparece o multiplicador espacial interagindo com os coeficientes β na Equação 5.34.

5.3.2 Modelo regressivo cruzado espacial ou modelo SLX

Considera-se, agora, que todas as variáveis contidas na matriz X possam transbordar espacialmente. No caso de uma função produção, a suposição seria de que algumas ou todas variáveis explicativas especificadas, a saber, capital, trabalho, terra etc, apresentassem um efeito de transbordamento localizado para as regiões vizinhas. Outro exemplo ilustrativo é o modelo de preços hedônicos de residências, em que os preços dos imóveis dependem não apenas das características do imóvel, tais como a quantidade de quartos, banheiros, metragem construída etc., e das características do bairro, como nível socioeconômico das famílias do bairro, quantidade de área verde no bairro, qualidade do ar, taxa de criminalidade, mas também das características dos bairros vizinhos. A representação esquemática, retratada na Figura 5.6, mostra que as variáveis explicativas da região i influenciam a variável dependente y na região vizinha j e vice-versa:

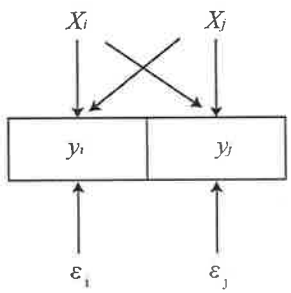


Figura 5.6. Processo regressivo cruzado espacial.

Para se captar isso, é preciso incluir adicionalmente um componente de transbordamento espacial WX no lado direito do modelo de regressão:

$$y = X\beta + WX\tau + \varepsilon \tag{5.36}$$

Convém ainda frisar que τ é um vetor (k-1 por 1) e não um escalar. Agora alguns elementos de τ podem ser nulos de tal sorte que algumas variáveis X defasadas espacialmente não precisam ser incluídas no modelo. A forma estrutural do modelo coincide com a forma reduzida e, na ausência de multiplicador espacial, os impactos de transbordamentos das regiões vizinhas são localizados, não afetando todo o sistema. Por isso, esse modelo é também chamado de transbordamentos locais, em contraste com o modelo (5.4), que envolve um transbordamento espacial mais global no sentido de implicar impactos, embora declinantes, para todas as regiões do sistema.

Um alerta que precisa ser feito é que a esperada alta correlação entre X e WX pode gerar grave multicolinearidade, tornando instáveis as estimativas dos parâmetros da regressão, principalmente em pequenas e médias amostras (Haining, 1990). Uma forma de detectar tal problema é rodar uma regressão mais geral com X e WX no lado direito, checar para a presença de multicolinearidade usando o número condicional ou construir uma tabela de correlações entre as variáveis explicativas X, verificando os pares de variáveis com maior correlação.

Há consequências para a inferência estatística importante neste tipo de modelo. Em primeiro lugar, a ausência da variável defasada espacialmente WX, quando esta é justificada teoricamente, provoca viés de omissão de variável relevante nas estimativas da regressão. Para ver isso, considera-se que o verdadeiro modelo representando um fenômeno assume a seguinte especificação:

$$y = X\beta + WX\tau + \varepsilon \tag{5.37}$$

O modelo estimado omitiu o componente de transbordamento espacial WX:

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{5.38}$$

A estimativa β por MQO é dada por:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \tag{5.39}$$

Substituindo o verdadeiro modelo (5.37) para representar y em (5.39), tem-se que:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'WX\tau + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \tag{5.40a}$$

Passando o operador esperança na equação (5.40a), obtém-se que:

$$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}E(X'WX)\tau + (X'X)^{-1}E(X'\varepsilon) \tag{5.40b}$$

O último termo do lado direito da regressão (5.40b) desaparece porque, pela hipótese da média condicional zero, as variáveis explicativas contidas em X não estão correlacionadas com o termo de erro aleatório (ε), implicando que $E(X'\varepsilon) = 0$. O problema repousa no segundo termo do lado direito da Equação 5.40b. É muito provável que as variáveis X e WX estejam correlacionadas, fazendo com que o segundo termo não se iguale a zero. Nesse caso, o estimador MQO de β é viesado. Tal estimador somente será justo, se a variável omitida WX não estiver correlacionada com X. Porém, é muito provável que WX e X estejam correlacionadas na presença de dependência espacial.

Em segundo lugar, um cuidado especial, precisa ser tomado com o modelo regressivo cruzado espacial. É muito provável que as variáveis explicativas exógenas defasadas espacialmente (WX) estejam correlacionadas com a defasagem espacial da variável dependente (Wy). Se incluir todas as defasagens espaciais de X e não o termo Wy, é possível que isso provoque viés nas estimativas dos coeficientes que acompanham as variáveis explicativas. A fonte do viés é proveniente novamente da omissão de variável relevante que, nesse caso, é a defasagem espacial da variável dependente (Wy). Entretanto, se incluir apenas algumas variáveis explicativas exógenas defasadas espacialmente, e se estas não estiverem correlacionadas com Wy, as estimativas de MQO são justas e consistentes.

5.3.3 Modelo regressivo cruzado espacial com erro de média móvel ou modelo SLXMA

Esta seria a representação de uma função de produção em que as variáveis de infraestrutura exibiriam transbordamentos, influenciando o nível de produção de regiões vizinhas, ao mesmo tempo em que há fatores não modelados de curto alcance, limitados aos vizinhos de primeira e segunda ordens, tais como poluição do ar ou de rios, mas que não estariam correlacionados com nenhuma variável explicativa. O esquema desse processo está mostrado na Figura 5.7:

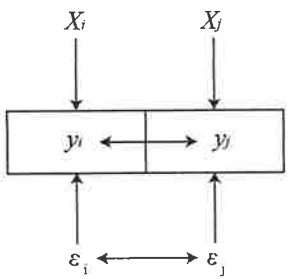


Figura 5.7. Processo de defasagem espacial com erro de média móvel espacial.
Fonte: Elaboração própria a partir de Baller et al. (2001).

Um modelo que represente essa situação precisa conter componentes de transbordamento espacial de alcance local que se manifeste nas variáveis explicativas exógenas (X) e no termo de erro bem comportado (ε), a saber, WX e $W\varepsilon$. O modelo, na sua forma estrutural, é representado do seguinte modo:

$$y = X\beta + WX\tau + \xi \tag{5.41a}$$

$$\xi = \gamma W\varepsilon + \varepsilon \tag{5.41b}$$

em que a notação permanece como sendo a mesma.

Convém observar que o modelo (5.41) usa a mesma matriz de ponderação espacial para defasar espacialmente as variáveis explicativas e o termo de erro. Todavia, é possível adotar duas matrizes de ponderação espacial diferentes sem prejuízo para a análise. O modelo, na sua forma reduzida, assume o mesmo jeito do modelo estrutural. Para ver isso, basta substituir (5.41b) em (5.41a) para se obter:

$$y = X\beta + WX\tau + \gamma W\varepsilon + \varepsilon \tag{5.42}$$

Nota-se que a matriz de ponderação espacial que é usada no operador de defasagem espacial para se construir a nova variável $W\varepsilon$ não precisa ser diferente da adotada para fazer a defasagem espacial de W, gerando WX, pois não há nenhum problema de identificação de parâmetros.

As consequências da má especificação do modelo são graves. Como foi visto na subseção anterior, não incluir os componentes de transbordamento espacial WX no modelo conduz ao viesamento dos coeficientes β na etapa da estimação, caso alguma das variáveis explicativas defasadas espacialmente omitidas esteja correlacionada com alguma outra variável explicativa exógena. A fonte desse viés é a omissão de

variável relevante. Por sua vez, a não introdução do termo de erro aleatório defasado espacialmente ($W\varepsilon$) no lado direito da equação leva à perda da eficiência das estimativas do modelo de regressão.

5.4 Modelos de dependência espacial de alcance global e local

5.4.1 Modelo de Durbin espacial ou modelo SDM[112]

Além de incorporar a ideia do transbordamento por meio da defasagem das variáveis independentes (WX), este modelo incorpora a suposição de que existiria um processo de difusão técnica que influenciasse a produção, ou algum outro fenômeno que justificasse a inclusão da variável endógena defasada espacialmente (Wy). O modelo de Durbin espacial tem tanto um alcance global dado pelo multiplicador espacial que surge em decorrência da presença da variável dependente defasada espacialmente quanto um alcance localizado dado pelas defasagens espaciais das variáveis explicativas. O esquema desse processo é representado na Figura 5.8:

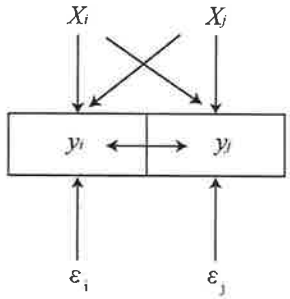


Figura 5.8. Processo de Durbin espacial.
Fonte: Elaboração própria a partir de Baller et al. (2001).

De acordo com LeSage e Pace (2009), a motivação para esse modelo pode ser uma situação muito prevalecente no trabalho empírico aplicado em econometria, a saber, a omissão de variáveis relevantes que estão correlacionadas com, pelo menos, alguma variável explicativa, incluída na regressão. Além disso, essa variável relevante omitida é autocorrelacionada espacialmente. Para ver isso, considera-se uma equação com duas variáveis explicativas x e z (LeSage; Pace, 2009):

$$y = \beta x + \theta z \tag{5.43}$$

[112] SDM é acrônimo do termo em inglês *Spatial Durbin Model*.

Considera-se que a variável explicativa z não é observada, sendo omitida da regressão. Então, o modelo de regressão estimado é:

$$y = \beta x + \xi \tag{5.44}$$

Supõe-se que a variável omitida z seja autocorrelacionada espacialmente:

$$z = \rho W z + \zeta \tag{5.45}$$

$$z = (I_n - \rho W)^{-1} \zeta \tag{5.46}$$

Substituindo (5.46) em (5.43), vem que:

$$y = \beta x + (I_n - \rho W)^{-1} (\theta \zeta) \tag{5.47}$$

$$y = \beta x + (I_n - \rho W)^{-1} \upsilon \tag{5.48}$$

chamando o termo $(\theta\zeta)$ de υ na Equação 5.48.

Convém notar que $z = (I_n - \rho W)^{-1}\upsilon$. Se z não estiver correlacionado com x, então, υ também não está correlacionado com x. Isso implica que:

$$E(y) = \beta x \tag{5.49}$$

Obtém-se o último resultado, considerando, por hipótese, $E(\upsilon) = 0$. Mas é provável que a variável z esteja correlacionada com a outra variável x da seguinte forma:

$$\upsilon = \delta x + \varepsilon \tag{5.50}$$

Substituindo (5.50) em (5.48), vem que:

$$y = \beta x + (I_n - \rho W)^{-1} (\delta x + \varepsilon) \tag{5.51}$$

$$y = \beta x + (I_n - \rho W)^{-1} \delta x + (I_n - \rho W)^{-1} \varepsilon \tag{5.52}$$

Multiplicando os dois lados da equação por $(I_n - \rho W)$, obtém-se:

$$(I_n - \rho W) y = (I_n - \rho W) \beta x + \delta x + \varepsilon \tag{5.53}$$

Manipulando algebricamente a Equação 5.53, obtém-se que:

$$y = \rho W y + (\beta + \delta) x + (-\rho\beta) W x + \varepsilon \tag{5.54}$$

Reescrevendo essa expressão como:

$$y = \pi_1 W y + \pi_2 x + \pi_3 W x + \varepsilon \tag{5.55}$$

Esse modelo contém restrições não lineares, conhecidas como restrições de fator comum. O produto do coeficiente de Wy com o coeficiente de x deveria igualar-se

ao negativo do coeficiente do termo Wx. Na literatura (Anselin, 1988; Anselin; Bera, 1998), isso é tratado como sendo a ***hipótese do fator comum***. Formalmente, para satisfazer tal hipótese, tem-se que:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = -\pi_3 \tag{5.56}$$

Assim, a partir da omissão da variável relevante z, que se apresenta autocorrelacionada espacialmente e, por sua vez, correlacionada com a variável explicativa x, incluída na regressão, gera-se o modelo de Durbin espacial, em que aparecem a defasagem da variável dependente e as defasagens das variáveis explicativas. Em termos gerais, o modelo de Durbin espacial, especificado matricialmente para diversas variáveis explicativas X e as suas defasagens espaciais WX, toma a seguinte forma:

$$y = \pi_1 W y + X\pi_2 + WX\pi_3 + \varepsilon \tag{5.57}$$

A presença de variáveis explicativas (X) junto de suas defasagens espaciais (WX) no lado direito da Equação 5.57 pode gerar multicolinearidade, tornando eventualmente instáveis os coeficientes estimados, se as correlações entre X e WX forem muito elevadas.

O efeito marginal total proporcionado por uma mudança de uma variável explicativa X_k é dado pela seguinte expressão no modelo SDM (LeSage; Pace, 2009):

$$\frac{\partial y}{\partial X_k} = (I_n - \rho W)^{-1} \beta_k + (I_n - \rho W)^{-1} W \tau_k \tag{5.58}$$

Em virtude de se ter agora o termo multiplicativo $W\tau_k$ na expressão, há uma grande heterogeneidade espacial nos coeficientes, pois faz com que exista um multiplicador espacial diferente para cada variável, ao contrário do que acontecia com o caso do modelo SAR (LeSage; Pace, 2009).

A especificação do modelo SDM levanta uma discussão sobre um possível *trade-off* entre o viés e a eficiência das estimativas. Ao especificar que todas as variáveis explicativas transbordem no modelo SDM para se evitar o viés de variável relevante seja omitida, isso pode fazer com que se introduzam no modelo algumas variáveis irrelevantes para explicar a variação da variável dependente y. Como se sabe, a incorporação de variáveis irrelevantes implica que as estimativas percam eficiência, apesar de que continuem não viesadas. O contra-argumento defendido aqui é que a perda de eficiência é um mal menor em comparação ao viés e à inconsistência das estimativas, provocada pela omissão de variáveis relevantes.

5.4.2 Modelo de defasagem espacial com erro de média móvel espacial ou modelo SARMA

Supõe-se agora que haja uma difusão de uma nova técnica de produção, concomitantemente com um efeito não modelado como a poluição na região, afetando as regiões vizinhas mais próximas, mas não todo o sistema. Convém destacar que o efeito não modelado não está correlacionado com nenhuma variável explicativa. Esquematicamente:

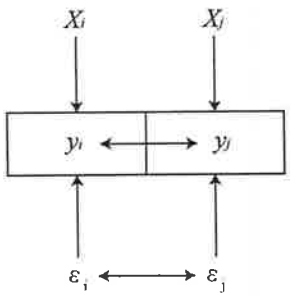


Figura 5.9. Processo de defasagem espacial com erro autorregressivo (SARMA).

Um modelo sobre isso é o que envolve uma defasagem espacial com um erro de média móvel espacial, assim especificado:[113]

$$y = \rho W_1 y + X\beta + \xi \tag{5.59a}$$

$$\xi = \gamma W_2 \varepsilon + \varepsilon \tag{5.59b}$$

As rotineiras restrições sobre os parâmetros espaciais são impostas a fim de que $|\rho| < 1$. A forma reduzida transforma-se em:

$$y = (I_n - \rho W_1)^{-1} X\beta + (I_n - \rho W_1)^{-1}(I_n - \gamma W_2)\varepsilon \tag{5.60}$$

Neste modelo, os efeitos não modelados nos erros são localizados, ao passo que os efeitos modelados nas variáveis explicativas apresentam um efeito global no sistema econômico. Claramente se vê por (5.60) que as variáveis explicativas (X) influenciam a variável dependente por meio do multiplicador espacial, fazendo que não apenas a variável explicativa localizada na região i impacte y, mas também a variável explicativa localizada nas regiões vizinhas a i.

[113] O modelo SARMA foi proposto por Anselin e Bera (1998).

A consequência para estimativas de não se levar em conta os componentes Wy e $W\xi$ repousa tanto no viés e na inconsistência das estimativas quanto na perda de eficiência, com o viesamento dos erros padrão. Por sua vez, a interpretação dos coeficientes de inclinação β do modelo é semelhante ao do modelo de defasagem espacial. Assim, para relembrar, o efeito marginal total de X_k sobre y é representado pela magnitude $(1 - \rho)^{-1}\beta_k$. Este impacto leva em conta todos os transbordamentos espaciais implicados pela autocorrelação espacial manifestada na variável dependente.

5.4.3 Modelo de Durbin espacial do erro ou modelo SDEM[114]

Tal tipo de modelo incorpora componentes de transbordamento espacial de alcance local que se manifesta nas variáveis explicativas exógenas (X), e componentes de transbordamento espacial global que afeta o termo de erro (ξ). Seja uma função de produção em que as variáveis explicativas exógenas, a saber, capital, trabalho, terra etc, exibiriam transbordamentos, influenciando o nível de produção de regiões vizinhas, ao mesmo tempo em que há fatores não modelados de alcance global. O esquema representativo assume a seguinte forma, retratado na Figura 5.10:

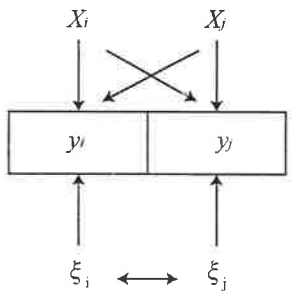


Figura 5.10. Processo de Durbin de erro espacial.

Fonte: Elaboração própria a partir de Baller et al. (2001).

O modelo, na sua forma estrutural, é representado do seguinte modo:

$$y = X\beta + WX\tau + \xi \tag{5.61a}$$

$$\xi = \lambda W\xi + \varepsilon \tag{5.61b}$$

[114] SDEM é acrônimo do termo em inglês *Spatial Durbin Error Model*.

em que a notação permanece como sendo a mesma. A restrição sobre o parâmetro espacial é de que $|\lambda| < 1$. O modelo, na sua forma reduzida, assume a seguinte forma:

$$y = X\beta + WX\tau + (I_n - \lambda W)^{-1}\varepsilon \tag{5.62}$$

Por (5.62), percebe-se claramente que as variáveis explicativas transbordam localmente, afetando apenas os vizinhos diretos, ao passo que o termo de erro aleatório transborda globalmente, afetando todas as regiões do sistema. Outro ponto a se destacar é que não há problemas de identificação. Assim, pode-se usar a mesma matriz de ponderação espacial para defasar tanto as variáveis explicativas quanto o termo de erro (ξ).

As consequências para a regressão de se omitir as defasagens espaciais na Equação 5.62 continuam sendo graves. A omissão das variáveis WX e $W\xi$ na regressão provoca estimativas inconsistentes e ineficientes dos coeficientes. A inconsistência vem do fato de que é muito provável que as variáveis contidas na matriz WX estejam correlacionadas com, pelo menos, uma variável explicativa da matriz X. A ineficiência das estimativas é em virtude do termo $W\xi$ que viesa os erros padrão das estimativas.

5.5 Modelo de dependência espacial geral ou modelo GSM

Com o conhecimento adquirido até aqui, já é possível propor um modelo geral, representando um processo espacial altamente complexo, envolvendo componentes de transbordamento de alcance global e local.

$$y = \rho W_1 y + X\beta + W_1 X\tau + \xi \tag{5.63a}$$

$$\xi = \lambda W_2 \xi + \varepsilon \tag{5.63b}$$

ou

$$\xi = \gamma W_1 \varepsilon + \varepsilon \qquad \varepsilon \sim Normal(0, \sigma^2 I_n) \tag{5.63c}$$

Todos os modelos vistos até aqui podem ser derivados deste modelo espacial geral, impondo convenientemente as restrições sobre os parâmetros. Por exemplo, o modelo de defasagem espacial (SAR), estudado na subseção 5.2.1, emerge se impuser as restrições sobre os escalares espaciais $\lambda = 0$, $\gamma = 0$ e o vetor $\tau = 0$, bem como $\rho \neq 0$. O modelo de erro autorregressivo espacial (SEM), analisado na subseção 5.2.2,

envolve impor as restrições $\rho = 0$, $\gamma = 0$ e o vetor $\tau = 0$, assim como $\lambda \neq 0$. O modelo de erro de média móvel espacial (SMA) implica colocar as restrições $\rho = 0$, $\lambda = 0$, o vetor $\tau = 0$ e o escalar $\gamma \neq 0$. Já o modelo de Durbin espacial (SDM), investigado na subseção 5.4.1, implica que se imponham as restrições de que $\rho \neq 0$ e o vetor $\tau \neq 0$, ao passo que $\lambda = 0$ e $\gamma = 0$. Estes modelos, portanto, estão aninhados dentro do modelo espacial geral, expresso na Equação 5.63. Este aninhamento dos modelos espaciais pode ser apreciado na Figura 5.11.

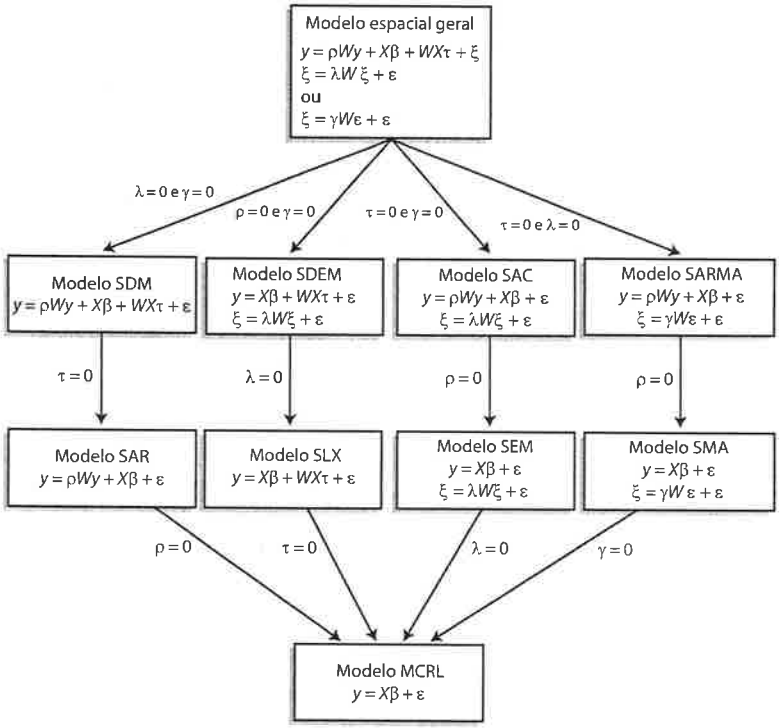


Figura 5.11. Aninhamento dos modelos espaciais.

Como o objetivo deste capítulo era fazer uma taxonomia dos modelos econométricos que tratam da dependência espacial, propositalmente, deixou-se de lado o tratamento do outro efeito espacial, representado pela heterogeneidade espacial, alvo de um capítulo em separado mais à frente. A hipótese sobre o termo de erro é de que

ele seja bem comportado, ou seja, possua média nula e variância constante. Mas uma extensão interessante desse modelo geral é incorporar parcialmente a heterogeneidade espacial, mais especificamente a heterocedasticidade, permitindo que o termo de erro não seja tão bem comportado. Por exemplo, o termo de erro pode assumir a seguinte forma:

$$\varepsilon \sim Normal(0, \sigma^2 \Omega) \tag{5.64}$$

sendo que Ω é a matriz de variância-covariância que permite conter termos não constantes na diagonal principal. Uma vez que os efeitos espaciais costumam aparecer imbricados num mesmo fenômeno em estudo, o que é importante salientar nesse momento é que é plenamente viável incorporar num mesmo modelo de regressão tanto a dependência espacial quanto a heterogeneidade espacial. Para modelar tal variância não constante, existem os chamados modelos de erro heterocedástico ou o cálculo de erros padrão robustos, a serem apresentados no capítulo onze. Mais recentemente, alguns autores estão interessado em abordar conjuntamente a dependência espacial e a heterocedasticidade num mesmo modelo de regressão (Arraiz et al., 2010; Kelejian; Prucha, 2007, 2010).

5.6 Resumo

Neste capítulo, foi visto que, tendo por objetivo captar o efeito representado pela dependência espacial, um modelo econométrico-espacial envolve a incorporação ao modelo de regressão linear clássico (5.1) de defasagens espaciais de y, X, ξ ou ε. A omissão na regressão das variáveis defasadas espacialmente, quando essas são justificadas do ponto de vista teórico ou do ponto de vista empírico, leva à má especificação do modelo, gerando graves implicações para a inferência estatística. Se as variáveis defasadas espacialmente forem Wy ou WX, isso implica viés e inconsistência das estimativas, ao passo que se forem $W\xi$ e $W\varepsilon$, isso envolve viesamento dos erros padrão e ineficiência nas estimativas. Porém, mesmo que as defasagens espaciais estejam corretamente especificadas no modelo para controlar para a autocorrelação espacial, cresce a importância da boa escolha da matriz W. Uma escolha inadequada da matriz W significa que ela capta pouca autocorrelação espacial, fazendo com que continue aparecendo este problema nos resíduos. Ademais, uma matriz W que não consiga capturar toda a autocorrelação espacial subjacente ao fenômeno sob estudo significa que as variáveis defasadas espacialmente são medidas com erro.

A análise da variância-covariância de vários dos modelos mostrou, cabalmente, que, na presença de autocorrelação espacial, os erros deixam de ser esféricos, ainda que originalmente o termo de erro fosse bem comportado. Isso induz a um tipo de imbricação entre dependência espacial e heterogeneidade espacial, que, neste caso, é manifestada na heterocedasticidade.

Nota-se que a tipologia dos modelos difere pela inclusão no lado direito da equação (5.1) de alguma das quatro variáveis defasadas espacialmente Wy, WX, $W\xi$ e $W\varepsilon$ ou de uma combinação delas. Qual componente de defasagem deve-se incluir depende de como o processo de interação espacial ocorre, assim como se há a ocorrência de má especificação do modelo ou erro de medida nas variáveis.

Outro aspecto distinto é a natureza do alcance da interação: global ou local. O alcance global da interação significa que todas as regiões do sistema sofrem impacto de alguma forma, mas são amortecidos à medida que a conectividade entre as regiões se reduz. Já o alcance local da interação indica que apenas uma parte das regiões do sistema é que sofre o impacto, sendo ele, assim, mais localizado e regionalizado.

É possível ressaltar os principais aspectos de todos esses modelos econométricos que tratam da autocorrelação espacial. O Quadro 5.1 fornece um resumo com os principais aspectos abordados na exposição da tipologia dos modelos econométrico-espaciais, como a defasagem espacial incluída no modelo básico da regressão linear clássica (5.1), o alcance da autocorrelação e a implicação para a estimação dos coeficientes β por MQO com a omissão das variáveis defasadas espacialmente contidas na segunda coluna.

Usando tamanhos de amostras grandes, as estimativas de modelos SAR, SAC e SARMA, bem como seus níveis de significância, devem ser muito parecidos, se tais modelos estiverem bem especificados (LeSage; Pace, 2009). Por sua vez, os coeficientes estimados nos modelos SLX, SLXMA e SDEM, assim como seus níveis de significância, também tendem a ser parecidos, dado que o maior conteúdo de informação das grandes amostras torna as estimativas mais eficientes, deixando pouco espaço para que uma eventual dependência espacial nos resíduos as influencie substancialmente. Já com amostras grandes, o nível de significância dos coeficientes dos modelos espaciais contendo dependência na forma de erro tende a ficar parecido com o nível de significância das estimativas do modelo clássico de regressão linear (MCRL). O modelo SDM tende a ganhar importância cada vez maior em decorrência do fato de que tal modelo pode ser o mais representativo de um processo gerador de dados que implica a omissão de variáveis relevantes autocorrelacionadas espacialmente, problema frequente na econometria aplicada.

Quadro 5.1. Resumo de alguns aspectos dos modelos econométrico-espaciais.

Modelo	Defasagem Espacial	Alcance	Implicação
Defasagem (SAR)	Wy	Global	Viés
Erro autorregressivo (SEM)	$W\xi$	Global	Ineficiência
Defasagem com erro autorregressivo (SAC)	Wy e $W\xi$	Global	Viés e ineficiência
Erro de média móvel (SMA)	$W\varepsilon$	Local	Ineficiência
Regressivo cruzado espacial (SLX)	WX	Local	Viés
Regressivo cruzado espacial com erro de média móvel (SLXMA)	WX e $W\varepsilon$	Local	Viés e Ineficiência
Durbin espacial (SDM)	Wy e WX	Global e Local	Viés
Defasagem com erro de média móvel (SARMA)	Wy e $W\varepsilon$	Global e Local	Viés e Ineficiência
Durbin espacial do erro (SDEM)	WX e $W\xi$	Global e Local	Viés e Ineficiência
Geral Espacial (GSM)	Wy, WX, $W\xi$ e $W\varepsilon$	Global e Local	Viés e Ineficiência

Como ressaltado por Gibbons e Overman (2012), pode ser difícil representar o processo gerador dos dados do fenômeno sob estudo pela especificação dos modelos espaciais apresentados neste capítulo por conta do problema de identificação dos parâmetros. Isso acontece porque a diferença entre alguns modelos espaciais é pequena para ser bem especificada por meio dos dados observados e pela teoria. Consequentemente, a apuração do efeito causal pode ficar prejudicada.

Mesmo que o modelo esteja bem especificado, com a inclusão das variáveis defasadas espacialmente adequadas, não há ainda garantia de que a estimação dos coeficientes espaciais seja consistente. Isso depende da etapa da estimação correta de um modelo espacial bem especificado. Por exemplo, o modelo SAR envolve a inclusão de uma variável endógena Wy no seu lado direito. Se o modelo SAR for estimado por MQO, a estimativa do parâmetro espacial ρ é inconsistente.

Nesse sentido, as questões que ficam para ser respondida nos próximos capítulos são as seguintes:

a) Que método de estimação se deve usar para estimar os coeficientes dos diversos modelos econométrico-espaciais?
b) Como se especificam as variáveis defasadas espacialmente que devem ser incluídas no modelo básico (5.1)?

A primeira questão envolvendo a estimação é respondida no próximo capítulo, enquanto a segunda questão é alvo de análise no Capítulo 7.