NEREUS

Núcleo de Economia Regional e Urbana
da Universidade de São Paulo

The University of São Paulo
Regional and Urban Economics Lab

# Aula 3: Modelos Regionais e Inter-regionais

Prof. Eduardo A. Haddad

# Modelos regionais de IP

**Relações de Insumo-Produto numa matriz regional**

| | Setores Compradores | | | |
|---|---|---|---|---|
| Set. Vend. | Insumos Intermediários | Exp. Resto País | Dem. Final | Prod. Total |
| | Importações do Resto do País (MP) | | MP | MP |
| | Importações do Resto do Mundo (MM) | | MM | MM |
| | Impostos Indiretos Líquidos (IIL) | IIL | IIL | IIL |
| | Valor Adicionado | | | |
| | Produção Total | | | |

Fonte: Guilhoto (2011).

# Modelos regionais

Características específicas da região:

- Função de produção (*mix* de insumos)
- Tamanho *vs*. Dependência

Modelos regionais (1 região):

- Impactos sobre os setores produtivos da região causados por variação na demanda final por produtos regionais

Notação: $Y^R, X^R, A^R$

Problema básico: $A \rightarrow A^R$

# Modelos regionais

1) Coeficientes nacionais:

Estimativa de percentuais da oferta regional por setor

2) Coeficientes regionais:

Receitas regionais diferentes
Solução ideal: *surveys*

- ✓ Quanto do produto *i* você comprou?
- ✓ Quanto do produto *i* produzido dentro/fora de MG você comprou?

Coeficientes técnicos regionais + dependência (coeficientes de insumos regionais)

# Estimação de modelos regionais

Primeiros estudos:

$$p_j^R = \frac{\left(X_j^R - E_j^R\right)}{\left(X_j^R - E_j^R + M_j^R\right)}$$

where:

$X_j^R$ is the total output of good $j$ in region $R$;

$E_j^R$ is the total exports of good $j$ from region $R$;

$M_j^R$ is the total imports of good $j$ by region $R$.

$$A^R = \hat{P}A \longrightarrow X^R = \left(I - \hat{P}A\right)^{-1} Y^R$$

# Regionalização

<u>Problema empírico</u>: dados sobre exportações e importações setoriais nem sempre estão disponíveis $\left(p_i^R\right)$

<u>Problema</u>: estimar $a_{ij}^{RR}$

1) $a_{ij}^{R} = \left(\alpha_{ij}^{R}\right)\left(a_{ij}^{N}\right)$

2) $a_{ij}^{RR} = \left(\beta_{ij}^{R}\right)\left(a_{ij}^{R}\right) \Leftrightarrow a_{ij}^{RR} = \left(\gamma_{ij}^{R}\right)\left(a_{ij}^{N}\right)$

Não há informação suficiente para encontrar os $\alpha_{ij}^{R}$ e $\beta_{ij}^{R}$

Impõem-se restrições:

A. $a_{ij}^{R} = \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{N}}\ (\alpha_{ij}^{R} = 1)$

B. $\forall i\ \beta_{ij}^{R} = p_i^R$

# Quociente locacional

Indicador que compara a participação de uma região em um setor específico com a sua participação em algum agregado básico (i.e. sua “parcela esperada”)

Também compara a parcela de um determinado setor em uma região com sua parcela no país (ou região de referência)

Utilizados em estágios exploratórios de uma pesquisa

# Quociente locacional

$\boldsymbol{R_i}$ = produção do setor *i* em uma região
$\boldsymbol{R}$ = produção total em uma região
$\boldsymbol{N_i}$ = produção do setor *i* no país
$\boldsymbol{N}$ = produção total no país

Quociente locacional do setor *i* na região:

$$\frac{R_i/N_i}{R/N} \text{; or } \frac{R_i/R}{N_i/N}$$

Quociente locacional **< 1**:

- Região possui menos do que sua "parcela esperada" do setor *i*
- Setor *i* é relativamente menos concentrado na região

# Uso do quociente locacional

$$a_{ij}^{RR} = \begin{cases} a_{ij}^{N}\left(LQ_i^R\right) & \text{se } LQ_i^R < 1 \\ a_{ij}^{N} & \text{se } LQ_i^R \geq 1 \end{cases}$$

# Estimação de modelos regionais

Exemplo:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} .8 & 0 \\ 0 & .6 \end{bmatrix}, \qquad A^R = \hat{P}A = \begin{bmatrix} .8 & 0 \\ 0 & .6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .15 & .25 \\ .20 & .05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .12 & .20 \\ .12 & .03 \end{bmatrix},$$

$$(I - A^R)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.169 & .241 \\ .145 & 1.061 \end{bmatrix}$$

**(Terceiro exemplo do arquivo Excel)**

# Multiplicadores em modelos regionais

$$A^R = \hat{P}A$$

$$(I\text{-}A)^{-1} \rightarrow O_j$$

$$\left(I\text{-}A^R\right)^{-1} \rightarrow O_j^R$$

$$O_j^{\tilde{R}} = O_j - O_j^R \text{ (multiplic ador externo)}$$

# Coeficientes regionais

Coeficientes regionais:

$$a_{ij}^{LL} = \frac{z_{ij}^{LL}}{x_j^L}$$

Produto regional:

$$x^L = (I - A^{LL})^{-1} y^L$$

# Modelos inter-regionais de IP

Relações de Insumo-Produto num sistema inter-regional

| | Setores - Região L | Setores - Região M | L | M | |
|---|---|---|---|---|---|
| Set. Reg. L | Insumos Intermediários LL | Insumos Intermediários LM | DF LL | DF LM | Prod. Total L |
| Set. Reg. M | Insumos Intermediários ML | Insumos Intermediários MM | DF ML | DF MM | Prod. Total M |
| | Imp. Resto Mundo (M) | Imp. Resto Mundo (M) | M | M | M |
| | Impostos Ind. Liq. (IIL) | Impostos Ind. Liq. (IIL) | IIL | IIL | IIL |
| | Valor Adicionado | Valor Adicionado | | | |
| | Prod. Total Região L | Prod. Total Região M | | | |

Fonte: Guilhoto (2011).

# Modelos inter-regionais de IP

# Modelos inter-regionais de IP

# Modelos regionais e inter-regionais

**Modelo regional:**

- Região desconectada do restante do país
- Não reconhece as inter-relações entre as regiões
- Efeitos econômicos subestimados

**Modelo inter-regional:**

- Capta as ligações inter-regionais
- Efeito econômico total é maior

# Modelos regionais e inter-regionais

Os modelos de **insumo-produto inter-regionais** (IP-IR) têm o objetivo de captar os *linkages* (encadeamentos) entre os setores e regiões e, portanto, os aspectos inter-regionais da produção.

O sistema inter-regional complementa o sistema regional ao incorporar as relações entre as regiões, exportações e importações, expressas por meio dos fluxos de bens que se destinam tanto ao consumo intermediário como à demanda final.

# Modelo inter-regional

**Sistema inter-regional de insumo-produto**

| | Setores Região L | Setores Região M | Região L | Região M | |
|---|---|---|---|---|---|
| Setores Região L | Insumos Intermediários ($Z^{LL}$) | Insumos Intermediários ($Z^{LM}$) | Demanda Final ($Y^{LL}$) | Demanda Final ($Y^{LM}$) | Demanda Total ($X^{L}$) |
| Setores Região M | Insumos Intermediários ($Z^{ML}$) | Insumos Intermediários ($Z^{MM}$) | Demanda Final ($Y^{ML}$) | Demanda Final ($Y^{MM}$) | Demanda Total ($X^{M}$) |
| | Importações ($M^{L}$) | Importações ($M^{M}$) | Importações ($M^{L}$) | Importações ($M^{M}$) | M |
| | IIL ($T^{L}$) | IIL ($T^{M}$) | IIL ($T^{L}$) | IIL ($T^{M}$) | T |
| | Valor Adicionado ($W^{L}$) | Valor Adicionado ($W^{M}$) | | | |
| | Produção Total ($X^{L}$) | Produção Total ($X^{M}$) | | | |

# Modelo inter-regional

Para apresentar a estrutura básica do **modelo inter-regional de insumo-produto**, suponha uma economia com:

- 2 (duas) regiões: L e M
- 3 (três) setores produtivos em L
- 2 (dois) setores produtivos em M

# Modelo inter-regional*

**Sistema inter-regional - setor x setor**

| Matriz IP | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | DF | DT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 150 | 500 | 50 | 25 | 75 | 200 | 1000 |
| L | 2 | 200 | 100 | 400 | 200 | 100 | 1000 | 2000 |
| L | 3 | 300 | 500 | 50 | 60 | 40 | 50 | 1000 |
| M | 1 | 75 | 100 | 60 | 200 | 250 | 515 | 1200 |
| M | 2 | 50 | 25 | 25 | 150 | 100 | 450 | 800 |
| VA | | 225 | 775 | 415 | 565 | 235 | | |
| PT | | 1000 | 2000 | 1000 | 1200 | 800 | | |

**Fonte:** Miller e Blair (2009) – Many-Region Models: The Interregional Approach.

# Modelo inter-regional

Dessa maneira, os fluxos monetários interindustriais (**consumo intermediário**) são representados pela matriz ($\mathbf{Z}$):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{Z}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{Z}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{Z}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

em que $\mathbf{Z}^{\mathrm{LL}}$ e $\mathbf{Z}^{\mathrm{MM}}$ são as matrizes com os **fluxos intra-regionais** e $\mathbf{Z}^{\mathrm{LM}}$ e $\mathbf{Z}^{\mathrm{ML}}$ as matrizes com os **fluxos inter-regionais**.

# Modelo inter-regional

Essa matrizes de fluxos intra-regionais e inter-regionais mostram os fluxos entre as indústrias de ambas as regiões (cada fluxo $z_{\mathrm{ij}}$):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11}^{\mathrm{LL}} & z_{12}^{\mathrm{LL}} & z_{13}^{\mathrm{LL}} & z_{11}^{\mathrm{LM}} & z_{12}^{\mathrm{LM}} \\ z_{21}^{\mathrm{LL}} & z_{22}^{\mathrm{LL}} & z_{23}^{\mathrm{LL}} & z_{21}^{\mathrm{LM}} & z_{22}^{\mathrm{LM}} \\ z_{31}^{\mathrm{LL}} & z_{32}^{\mathrm{LL}} & z_{33}^{\mathrm{LL}} & z_{31}^{\mathrm{LM}} & z_{32}^{\mathrm{LM}} \\ z_{11}^{\mathrm{ML}} & z_{12}^{\mathrm{ML}} & z_{13}^{\mathrm{ML}} & z_{11}^{\mathrm{MM}} & z_{12}^{\mathrm{MM}} \\ z_{21}^{\mathrm{ML}} & z_{22}^{\mathrm{ML}} & z_{23}^{\mathrm{ML}} & z_{21}^{\mathrm{MM}} & z_{22}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

# Modelo inter-regional

A produção total (produto) de cada um dos setores em cada uma da regiões é dada por:

$$
\begin{aligned}
x_1^{\mathrm{L}} &= z_{11}^{\mathrm{LL}} + z_{12}^{\mathrm{LL}} + z_{13}^{\mathrm{LL}} + z_{11}^{\mathrm{LM}} + z_{12}^{\mathrm{LM}} + y_1^{\mathrm{L}} \\
x_2^{\mathrm{L}} &= z_{21}^{\mathrm{LL}} + z_{22}^{\mathrm{LL}} + z_{23}^{\mathrm{LL}} + z_{21}^{\mathrm{LM}} + z_{22}^{\mathrm{LM}} + y_2^{\mathrm{L}} \\
x_3^{\mathrm{L}} &= z_{31}^{\mathrm{LL}} + z_{32}^{\mathrm{LL}} + z_{33}^{\mathrm{LL}} + z_{31}^{\mathrm{LM}} + z_{32}^{\mathrm{LM}} + y_3^{\mathrm{L}} \\
x_1^{\mathrm{M}} &= z_{11}^{\mathrm{ML}} + z_{12}^{\mathrm{ML}} + z_{13}^{\mathrm{ML}} + z_{11}^{\mathrm{MM}} + z_{12}^{\mathrm{MM}} + y_1^{\mathrm{M}} \\
x_2^{\mathrm{M}} &= z_{21}^{\mathrm{ML}} + z_{22}^{\mathrm{ML}} + z_{23}^{\mathrm{ML}} + z_{21}^{\mathrm{MM}} + z_{22}^{\mathrm{MM}} + y_2^{\mathrm{M}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

em que $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}}$ e $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{MM}}$ são as vendas interindustriais dentro das regiões (**intra-regional**), $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LM}}$ e $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}$ são as vendas interindustriais entre as regiões (**inter-regional**) e $y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}}$ e $y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{M}}$ são as vendas para os agentes de demanda final.

# Modelo inter-regional

Assim como no modelo regional de insumo-produto, assumindo que cada um dos setores produz bens e serviços segundo uma "receita" fixa, podemos definir os coeficientes técnicos.

Os **coeficientes de insumo regional** são dados por:

$$a_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}} = \frac{z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}}}{x_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} \qquad \text{e} \qquad a_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{MM}} = \frac{z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{MM}}}{x_{\mathrm{j}}^{\mathrm{M}}} \tag{4}$$

Os **coeficientes de comércio inter-regional** são dados por:

$$a_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}} = \frac{z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}}{x_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} \qquad \text{e} \qquad a_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LM}} = \frac{z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LM}}}{x_{\mathrm{j}}^{\mathrm{M}}} \tag{5}$$

Esses **coeficientes técnicos** também são <u>fixos</u> no modelo inter-regional (os setores usam insumos em proporções fixas).

# Modelo inter-regional

Utilizando os coeficientes de insumo regional e de comércio inter-regional, equações (4) e (5), podemos reescrever as equações de produção (3) como:

$$
\begin{aligned}
x_1^{\mathrm{L}} &= a_{11}^{\mathrm{LL}} x_1^{\mathrm{L}} + a_{12}^{\mathrm{LL}} x_2^{\mathrm{L}} + a_{13}^{\mathrm{LL}} x_3^{\mathrm{L}} + a_{11}^{\mathrm{LM}} x_1^{\mathrm{M}} + a_{12}^{\mathrm{LM}} x_2^{\mathrm{M}} + y_1^{\mathrm{L}} \\
x_2^{\mathrm{L}} &= a_{21}^{\mathrm{LL}} x_1^{\mathrm{L}} + a_{22}^{\mathrm{LL}} x_2^{\mathrm{L}} + a_{23}^{\mathrm{LL}} x_3^{\mathrm{L}} + a_{21}^{\mathrm{LM}} x_1^{\mathrm{M}} + a_{22}^{\mathrm{LM}} x_2^{\mathrm{M}} + y_2^{\mathrm{L}} \\
x_3^{\mathrm{L}} &= a_{31}^{\mathrm{LL}} x_1^{\mathrm{L}} + a_{32}^{\mathrm{LL}} x_2^{\mathrm{L}} + a_{33}^{\mathrm{LL}} x_3^{\mathrm{L}} + a_{31}^{\mathrm{LM}} x_1^{\mathrm{M}} + a_{32}^{\mathrm{LM}} x_2^{\mathrm{M}} + y_3^{\mathrm{L}} \\
x_1^{\mathrm{M}} &= a_{11}^{\mathrm{ML}} x_1^{\mathrm{L}} + a_{12}^{\mathrm{ML}} x_2^{\mathrm{L}} + a_{13}^{\mathrm{ML}} x_3^{\mathrm{L}} + a_{11}^{\mathrm{MM}} x_1^{\mathrm{M}} + a_{12}^{\mathrm{MM}} x_2^{\mathrm{M}} + y_1^{\mathrm{M}} \\
x_2^{\mathrm{M}} &= a_{21}^{\mathrm{ML}} x_1^{\mathrm{L}} + a_{22}^{\mathrm{ML}} x_2^{\mathrm{L}} + a_{23}^{\mathrm{ML}} x_3^{\mathrm{L}} + a_{21}^{\mathrm{MM}} x_1^{\mathrm{M}} + a_{22}^{\mathrm{MM}} x_2^{\mathrm{M}} + y_2^{\mathrm{M}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

# Modelo inter-regional

Isolando as demandas ($y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}}$, $y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{M}}$) e colocando em evidência o produto ($x_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}}$, $x_{\mathrm{i}}^{\mathrm{M}}$), temos:

$$
\begin{aligned}
&\left(1-a_{11}^{\mathrm{LL}}\right)x_1^{\mathrm{L}} - a_{12}^{\mathrm{LL}}x_2^{\mathrm{L}} - a_{13}^{\mathrm{LL}}x_3^{\mathrm{L}} - a_{11}^{\mathrm{LM}}x_1^{\mathrm{M}} - a_{12}^{\mathrm{LM}}x_2^{\mathrm{M}} = y_1^{\mathrm{L}} \\
&-a_{21}^{\mathrm{LL}}x_1^{\mathrm{L}} + \left(1-a_{22}^{\mathrm{LL}}\right)x_2^{\mathrm{L}} - a_{23}^{\mathrm{LL}}x_3^{\mathrm{L}} - a_{21}^{\mathrm{LM}}x_1^{\mathrm{M}} - a_{22}^{\mathrm{LM}}x_2^{\mathrm{M}} = y_2^{\mathrm{L}} \\
&-a_{31}^{\mathrm{LL}}x_1^{\mathrm{L}} - a_{32}^{\mathrm{LL}}x_2^{\mathrm{L}} + \left(1-a_{33}^{\mathrm{LL}}\right)x_3^{\mathrm{L}} - a_{31}^{\mathrm{LM}}x_1^{\mathrm{M}} - a_{32}^{\mathrm{LM}}x_2^{\mathrm{M}} = y_3^{\mathrm{L}} \\
&-a_{11}^{\mathrm{ML}}x_1^{\mathrm{L}} - a_{12}^{\mathrm{ML}}x_2^{\mathrm{L}} - a_{13}^{\mathrm{ML}}x_3^{\mathrm{L}} + \left(1-a_{11}^{\mathrm{MM}}\right)x_1^{\mathrm{M}} - a_{12}^{\mathrm{MM}}x_2^{\mathrm{M}} = y_1^{\mathrm{M}} \\
&-a_{21}^{\mathrm{ML}}x_1^{\mathrm{L}} - a_{22}^{\mathrm{ML}}x_2^{\mathrm{L}} - a_{23}^{\mathrm{ML}}x_3^{\mathrm{L}} - a_{21}^{\mathrm{MM}}x_1^{\mathrm{M}} + \left(1-a_{22}^{\mathrm{MM}}\right)x_2^{\mathrm{M}} = y_2^{\mathrm{M}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Ou em termos matriciais:

$$
(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{8}
$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, $\mathbf{A}$ a matriz de coeficientes técnicos, $\mathbf{x}$ o vetor de produto e $\mathbf{y}$ o vetor de demanda final.

# Modelo inter-regional

Matriz de identidade:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Matriz de coeficientes técnicos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\mathrm{LL}} & a_{12}^{\mathrm{LL}} & a_{13}^{\mathrm{LL}} & a_{11}^{\mathrm{LM}} & a_{12}^{\mathrm{LM}} \\ a_{21}^{\mathrm{LL}} & a_{22}^{\mathrm{LL}} & a_{23}^{\mathrm{LL}} & a_{21}^{\mathrm{LM}} & a_{22}^{\mathrm{LM}} \\ a_{31}^{\mathrm{LL}} & a_{32}^{\mathrm{LL}} & a_{33}^{\mathrm{LL}} & a_{31}^{\mathrm{LM}} & a_{32}^{\mathrm{LM}} \\ a_{11}^{\mathrm{ML}} & a_{12}^{\mathrm{ML}} & a_{13}^{\mathrm{ML}} & a_{11}^{\mathrm{MM}} & a_{12}^{\mathrm{MM}} \\ a_{21}^{\mathrm{ML}} & a_{22}^{\mathrm{ML}} & a_{23}^{\mathrm{ML}} & a_{21}^{\mathrm{MM}} & a_{22}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \tag{10}$$

# Modelo inter-regional

Vetor de produção:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1^{\mathrm{L}} \\ x_2^{\mathrm{L}} \\ x_3^{\mathrm{L}} \\ x_1^{\mathrm{M}} \\ x_2^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Vetor de demanda final:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{L}} \\ y_2^{\mathrm{L}} \\ y_3^{\mathrm{L}} \\ y_1^{\mathrm{M}} \\ y_2^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

# Modelo inter-regional

Ou seja, podemos reescrever a equação (8), $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{y}$, como:

$$\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{y}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix} \tag{13}$$

Rearranjando, temos a equação básica do modelo de insumo-produto inter-regional:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{y}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}} \tag{14}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{B}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}}\\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix} \tag{15}$$

em que $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{B}$ é a **matriz inversa de Leontief**.

# Modelo inter-regional

**Quais são as vantagens e desvantagens do modelo inter-regional de insumo-produto?**

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix}$$

**Vantagem**: captura a magnitude de efeitos sobre cada setor em cada uma das regiões.

**Desvantagem**: aumento da necessidade de dados e a hipótese necessária de relações de comércio constantes.

# Modelo inter-regional

Suponha um aumento na demanda por automóveis da RENAULT produzidos no Paraná (PR).

**Efeito *spillover* inter-regional:**

*Aumento da produção de automóveis no PR* → *Aumento da produção de componentes em SP*

**Efeito *spillover* inter-regional:**

*Aumento da produção de peças em SP* → *Aumento da produção de borracha no PR*

**Efeito *feedback*:**

*Aumento da produção de automóveis no PR* → *Aumento da produção de peças em SP* → *Aumento da produção de borracha no PR*

O modelo inter-regional permite isolar a magnitude destes efeitos!

# Modelo inter-regional

Para ver isso, podemos, a partir da equação (13), definir $\mathbf{Y^L}$ e $\mathbf{Y^M}$ da seguinte maneira:

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \mathbf{Y^L} \qquad (16)$$

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X^L} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \mathbf{Y^M} \qquad (17)$$

Suponha que $\mathbf{X}^{\mathrm{L}}$, $\mathbf{X}^{\mathrm{M}}$, $\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$ e $\mathbf{Y^M}$ representem $\Delta\mathbf{X}^{\mathrm{L}}$, $\Delta\mathbf{X}^{\mathrm{M}}$, $\Delta\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$ e $\Delta\mathbf{Y^M}$.

Se temos $\Delta\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$ e $\Delta\mathbf{Y^M}$ (variações na demanda final nas duas regiões), podemos encontrar as variações na produção das duas regiões.

Entretanto, se assumirmos $\Delta\mathbf{Y^M} = 0$, podemos calcular o impacto de variações na demanda final da região L ($\Delta\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$) sobre as duas regiões.

# Modelo inter-regional

Se $\mathbf{Y}^{\mathbf{M}} = 0$, temos:

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = 0 \qquad (18)$$

Rearranjando, temos:

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} \qquad (19)$$

Isolando $\mathbf{X}^{\mathrm{M}}$:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} \qquad (20)$$

Substituindo (20) em (16):

$$\underbrace{\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{L}}}_{\text{Resultado do modelo para uma região}} - \underbrace{\mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}}_{\text{Demanda adicional devido às relações de comércio: feedback}} = \mathbf{Y}^{\mathbf{L}} \qquad (21)$$

# Modelo inter-regional

Os componentes da equação (21),

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{L}}-\mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}=\mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

podem ser interpretados como:

- $\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}$ - captura a magnitude dos fluxos de M para L dado o aumento do produto em L;
- $\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}$ - traduz os fluxos em requisitos diretos e indiretos em M para produzir os insumos necessários;
- $\mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}$ - indica a magnitude das vendas adicionais de L para M necessárias para a produção total em M.

# Modelo inter-regional

Portanto, resumidamente temos que:

- O **modelo regional** considera: *(22)*

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\mathbf{X}^{\mathrm{L}} = \mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

ou em **termos de produto**: *(22')*

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

- Enquanto o **modelo inter-regional** considera: *(23)*

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} = \mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

ou em **termos de produto**: *(23')*

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\mathbf{B}^{\mathrm{MM}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

# Modelo inter-regional

**Sistema inter-regional - setor x setor**

| Matriz IP | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | DF | DT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 150 | 500 | 50 | 25 | 75 | 200 | 1000 |
| L | 2 | 200 | 100 | 400 | 200 | 100 | 1000 | 2000 |
| L | 3 | 300 | 500 | 50 | 60 | 40 | 50 | 1000 |
| M | 1 | 75 | 100 | 60 | 200 | 250 | 515 | 1200 |
| M | 2 | 50 | 25 | 25 | 150 | 100 | 450 | 800 |
| VA | | 225 | 775 | 415 | 565 | 235 | | |
| PT | | 1000 | 2000 | 1000 | 1200 | 800 | | |

**Fonte:** Miller e Blair (2009) – Many-Region Models: The Interregional Approach.

# Exemplo numérico

**Sistema inter-regional - setor x setor**

| Matriz IP | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | DF | DT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 150 | 500 | 50 | 25 | 75 | 200 | 1000 |
| L | 2 | 200 | 100 | 400 | 200 | 100 | 1000 | 2000 |
| L | 3 | 300 | 500 | 50 | 60 | 40 | 50 | 1000 |
| M | 1 | 75 | 100 | 60 | 200 | 250 | 515 | 1200 |
| M | 2 | 50 | 25 | 25 | 150 | 100 | 450 | 800 |
| VA | | 225 | 775 | 415 | 565 | 235 | | |
| PT | | 1000 | 2000 | 1000 | 1200 | 800 | | |

**Matriz de coeficientes técnicos - Efeito direto**

| A | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 0,150 | 0,250 | 0,050 | 0,021 | 0,094 |
| L | 2 | 0,200 | 0,050 | 0,400 | 0,167 | 0,125 |
| L | 3 | 0,300 | 0,250 | 0,050 | 0,050 | 0,050 |
| M | 1 | 0,075 | 0,050 | 0,060 | 0,167 | 0,313 |
| M | 2 | 0,050 | 0,013 | 0,025 | 0,125 | 0,125 |

***Exemplo:*** $a_{ij}^{LL} = \frac{z_{ij}^{LL}}{x_j^{L}}$

$$a_{12}^{LL} = \frac{z_{12}^{LL}}{x_2^{L}} = \frac{500}{2000} = 0{,}250$$

# Exemplo numérico

A partir da matriz A, podemos calcular a **matriz inversa de Leontief** $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

**Matriz inversa de Leontief - Efeito direto + indireto**

| $(I-A)^{-1}$ | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 1,423 | 0,465 | 0,291 | 0,192 | 0,304 |
| L | 2 | 0,635 | 1,424 | 0,671 | 0,409 | 0,456 |
| L | 3 | 0,638 | 0,537 | 1,336 | 0,250 | 0,311 |
| M | 1 | 0,267 | 0,200 | 0,197 | 1,341 | 0,547 |
| M | 2 | 0,147 | 0,091 | 0,093 | 0,215 | 1,254 |

# Exemplo numérico

Se considerarmos apenas o $\mathbf{A}^{\mathrm{LL}}$, como no modelo regional, temos a seguinte **matriz inversa de Leontief** $\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)^{-1}$:

**Matriz de coeficientes técnicos - região L**

| $A^{LL}$ | | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 0,150 | 0,250 | 0,050 |
| L | 2 | 0,200 | 0,050 | 0,400 |
| L | 3 | 0,300 | 0,250 | 0,050 |

**Matriz inversa de Leontief - região L**

| $(I-A^{LL})^{-1}$ | | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 1,365 | 0,425 | 0,251 |
| L | 2 | 0,527 | 1,348 | 0,595 |
| L | 3 | 0,570 | 0,489 | 1,289 |

Quão diferente são os resultados dos modelos (regional e inter-regional) dadas variações na demanda final da região L?

# Modelo regional versus inter-regional

**Modelo regional**

$$\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{L}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathbf{LL}}\right)^{-1} \Delta \mathbf{y}^{\mathbf{L}}$$

| | | $\Delta Y^L$ |
|---|---|---|
| L | 1 | 100 |
| L | 2 | 0 |
| L | 3 | 0 |

| | | $\Delta X^L$ |
|---|---|---|
| L | 1 | 136,51 |
| L | 2 | 52,73 |
| L | 3 | 56,98 |

$$\sum_{i=1}^{3} x_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}} = 246{,}23$$

| Erro |
|---|
| 8,68% |

**Modelo inter-regional**

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \Delta \mathbf{y}$$

| | | $\Delta Y$ |
|---|---|---|
| L | 1 | 100 |
| L | 2 | 0 |
| L | 3 | 0 |
| M | 1 | 0 |
| M | 2 | 0 |

| | | $\Delta X$ |
|---|---|---|
| L | 1 | 142,34 |
| L | 2 | 63,46 |
| L | 3 | 63,83 |
| M | 1 | 26,72 |
| M | 2 | 14,68 |

$$\sum_{i=1}^{3} x_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}} = 269{,}63$$

*O modelo regional **subestima** o produto total da região L. O erro é de 8,68% do valor verdadeiro (modelo inter-regional).*

# Multiplicador simples de produção

O **multiplicador simples de produção** no modelo inter-regional é dado por:

- Região L:

$$m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} = m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LL}} + m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{ML}} \tag{24}$$

$$m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}}}_{\text{Efeito intra-regional}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}}_{\text{Efeito inter-regional}} \tag{25}$$

- Região M:

$$m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{M}} = m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{MM}} + m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LM}} \tag{26}$$

$$m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{M}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{MM}}}_{\text{Efeito intra-regional}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LM}}}_{\text{Efeito inter-regional}} \tag{27}$$

# Multiplicador simples de produção

**Matriz inversa de Leontief - Efeito direto + indireto**

| $(I-A)^{-1}$ | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| L 1 | 1,423 | 0,465 | 0,291 | 0,192 | 0,304 |
| L 2 | 0,635 | 1,424 | 0,671 | 0,409 | 0,456 |
| L 3 | 0,638 | 0,537 | 1,336 | 0,250 | 0,311 |
| M 1 | 0,267 | 0,200 | 0,197 | 1,341 | 0,547 |
| M 2 | 0,147 | 0,091 | 0,093 | 0,215 | 1,254 |
| Total | 3,110 | 2,717 | 2,588 | 2,407 | 2,872 |

**Efeito intra-regional**

**Efeito inter-regional**

**Multiplicadores de produção**

**Exemplo:**

Multiplicador de produção da Região L (setor 1):

$$m(o)_1^{\mathrm{L}} = m(o)_1^{\mathrm{LL}} + m(o)_1^{\mathrm{ML}}$$

$$m(o)_1^{\mathrm{L}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{LL}}}_{\text{Efeito intra-regional}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{ML}}}_{\text{Efeito inter-regional}}$$

$$m(o)_1^{\mathrm{LL}} = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{LL}} = 1{,}423 + 0{,}635 + 0{,}638 = 2{,}696$$

$$m(o)_1^{\mathrm{ML}} = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{ML}} = 0{,}267 + 0{,}147 = 0{,}414$$

$$m(o)_1^{\mathrm{L}} = 2{,}696 + 0{,}414 = 3{,}110$$

# Decomposição regional

**Multiplicador total de produção** (região L):

$$m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} = m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LL}} + m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{ML}} \tag{28}$$

**Decomposição simples:**

$$\frac{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}}{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}}}{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}}{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} \quad \Rightarrow \quad 1 = o_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LL}} + o_{\mathrm{j}}^{\mathrm{ML}} \tag{29}$$

**Decomposição líquida:**

$$\frac{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1}{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}} - 1}{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}}{m(o)_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1} \quad \Rightarrow \quad 1 = ol_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LL}} + ol_{\mathrm{j}}^{\mathrm{ML}} \tag{30}$$

Similarmente, podemos decompor o multiplicador para região M.

# Decomposição regional

**Exemplo:** Multiplicador da Região L (setor 1):

**Multiplicador Simples de Produção**

| Região L | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{LL}$ | 2,696 | 2,426 | 2,298 |
| Inter-regional $m(o)_j^{ML}$ | 0,414 | 0,291 | 0,290 |
| Multiplicador $m(o)_j^{L}$ | 3,110 | 2,717 | 2,588 |

**Decomposição simples de $m(o)_j^{L}$**

| Região L | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{LL}$ | 86,7% | 89,3% | 88,8% |
| Inter-regional $m(o)_j^{ML}$ | 13,3% | 10,7% | 11,2% |
| Multiplicador $m(o)_j^{L}$ | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

**Decomposição líquida de $m(o)_j^{L}$**

| Região L | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{LL}$ | 80,4% | 83,1% | 81,7% |
| Inter-regional $m(o)_j^{ML}$ | 19,6% | 16,9% | 18,3% |
| Multiplicador $m(o)_j^{L}$ | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

**Decomposição simples**

$$\frac{m(o)_1^{\mathrm{L}}}{m(o)_1^{\mathrm{L}}} = \frac{m(o)_1^{\mathrm{LL}}}{m(o)_1^{\mathrm{L}}} + \frac{m(o)_1^{\mathrm{ML}}}{m(o)_1^{\mathrm{L}}} \qquad 1 = o_1^{\mathrm{LL}} + o_1^{\mathrm{ML}}$$

$$\frac{3{,}110}{3{,}110} = \frac{2{,}696}{3{,}110} + \frac{0{,}414}{3{,}110}$$

$$1 = 0{,}867 + 0{,}133$$

**Decomposição líquida**

$$\frac{m(o)_1^{\mathrm{L}} - 1}{m(o)_1^{\mathrm{L}} - 1} = \frac{m(o)_1^{\mathrm{LL}} - 1}{m(o)_1^{\mathrm{L}} - 1} + \frac{m(o)_1^{\mathrm{ML}}}{m(o)_1^{\mathrm{L}} - 1}$$

$$1 = ol_1^{\mathrm{LL}} + ol_1^{\mathrm{ML}}$$

$$\frac{3{,}110 - 1}{3{,}110 - 1} = \frac{2{,}696 - 1}{3{,}110 - 1} + \frac{0{,}414}{3{,}110 - 1}$$

$$1 = 0{,}804 + 0{,}196$$

# Decomposição regional

**Multiplicador Simples de Produção**

| Região L | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{LL}$ | 2,696 | 2,426 | 2,298 |
| Inter-regional $m(o)_j^{ML}$ | 0,414 | 0,291 | 0,290 |
| Multiplicador $m(o)_j^{L}$ | 3,110 | 2,717 | 2,588 |

**Multiplicador Simples de Produção**

| Região M | M 1 | M 2 |
|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{MM}$ | 1,556 | 1,801 |
| Inter-regional $m(o)_j^{LM}$ | 0,851 | 1,071 |
| Multiplicador $m(o)_j^{M}$ | 2,407 | 2,872 |

**Decomposição simples de $m(o)_j^{L}$**

| Região L | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{LL}$ | 86,7% | 89,3% | 88,8% |
| Inter-regional $m(o)_j^{ML}$ | 13,3% | 10,7% | 11,2% |
| Multiplicador $m(o)_j^{L}$ | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

**Decomposição simples de $m(o)_j^{M}$**

| Região M | M 1 | M 2 |
|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{MM}$ | 64,6% | 62,7% |
| Inter-regional $m(o)_j^{LM}$ | 35,4% | 37,3% |
| Multiplicador $m(o)_j^{M}$ | 100,0% | 100,0% |

**Decomposição líquida de $m(o)_j^{L}$**

| Região L | L 1 | L 2 | L 3 |
|---|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{LL}$ | 80,4% | 83,1% | 81,7% |
| Inter-regional $m(o)_j^{ML}$ | 19,6% | 16,9% | 18,3% |
| Multiplicador $m(o)_j^{L}$ | 100,0% | 100,0% | 100,0% |

**Decomposição líquida de $m(o)_j^{M}$**

| Região M | M 1 | M 2 |
|---|---|---|
| Intra-regional $m(o)_j^{MM}$ | 39,5% | 42,8% |
| Inter-regional $m(o)_j^{LM}$ | 60,5% | 57,2% |
| Multiplicador $m(o)_j^{M}$ | 100,0% | 100,0% |

# Modelo Fechado

As  famílias recebem renda como forma de pagamento pelo seu trabalho no processo de produção e, como consumidores, gastam seus rendimentos de forma relativamente padronizada segundo sua cesta de consumo.

O modelo aberto de Leontief capta somente os impactos diretos e indiretos ligados as relações técnicas intersetoriais de compra e venda de insumos.

Para capturar o canal adicional de transmissão resultante dos **efeitos induzidos** pela geração de renda e consumo, é preciso "fechar" o modelo em relação às famílias.

# Modelo Fechado

Em outras palavras, é preciso tornar o **consumo das famílias endógeno** no modelo.

Isso é feito modificando-se a formulação básica do modelo tal que:

- as famílias são movidas da coluna da demanda final para a última coluna da tabela de transações interindustriais; e
- o fator produtivo trabalho é movido para a última linha da tabela de transações interindustriais.

# Modelo Fechado

O modelo inter-regional **fechado** de insumo produto é representado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{h_c} \\ \mathbf{h_r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (31)$$

em $\mathbf{h_c}$ é um vetor coluna representando os coeficientes de consumo e $\mathbf{h_r}$ é um vetor linha representando os coeficientes de remuneração do trabalho.

# Modelo Fechado

Assumindo que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{x}} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{h_c} \\ \mathbf{h_r} & 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{y}} \tag{32}$$

podemos reescrever a equação básica de insumo-produto como:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathrm{y}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{y}} \tag{33}$$

em que $\bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}$.

# Modelo Fechado

Os coeficientes da matriz $\overline{\mathbf{B}}$ serão maiores do que aqueles calculados para o modelo aberto de Leontief.

As diferenças entre os coeficientes das matrizes inversa dos dois modelos representam o impacto induzido sobre a produção setorial decorrente da expansão do consumo das famílias.

# Exemplo numérico

**Sistema inter-regional - setor x setor**

| Matriz IP | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | DF | | DT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | Famílias | Outros | |
| L | 1 | 150 | 500 | 50 | 25 | 75 | 80 | 120 | 1000 |
| L | 2 | 200 | 100 | 400 | 200 | 100 | 300 | 700 | 2000 |
| L | 3 | 300 | 500 | 50 | 60 | 40 | 15 | 35 | 1000 |
| M | 1 | 75 | 100 | 60 | 200 | 250 | 115 | 400 | 1200 |
| M | 2 | 50 | 25 | 25 | 150 | 100 | 250 | 200 | 800 |
| VA | Trabalho | 125 | 300 | 200 | 365 | 100 | | | 1090 |
| | Outros | 100 | 475 | 215 | 200 | 135 | | | 1125 |
| PT | | 1000 | 2000 | 1000 | 1200 | 800 | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Emprego | 300 | 800 | 350 | 480 | 250 |

**Fonte:** Miller e Blair (2009) – Many-Region Models: The Interregional Approach.

# Exemplo numérico

**Sistema inter-regional - setor x setor**

| Matriz IP | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | DF Famílias | DF Outros | DT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 150 | 500 | 50 | 25 | 75 | 80 | 120 | 1000 |
| L | 2 | 200 | 100 | 400 | 200 | 100 | 300 | 700 | 2000 |
| L | 3 | 300 | 500 | 50 | 60 | 40 | 15 | 35 | 1000 |
| M | 1 | 75 | 100 | 60 | 200 | 250 | 115 | 400 | 1200 |
| M | 2 | 50 | 25 | 25 | 150 | 100 | 250 | 200 | 800 |
| VA | Trabalho | 125 | 300 | 200 | 365 | 100 | | | 1090 |
| | Outros | 100 | 475 | 215 | 200 | 135 | | | 1125 |
| PT | | 1000 | 2000 | 1000 | 1200 | 800 | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Emprego | 300 | 800 | 350 | 480 | 250 |

**Matriz de coeficientes técnicos (modelo aberto) - Efeito direto**

| A | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 0,150 | 0,250 | 0,050 | 0,021 | 0,094 |
| L | 2 | 0,200 | 0,050 | 0,400 | 0,167 | 0,125 |
| L | 3 | 0,300 | 0,250 | 0,050 | 0,050 | 0,050 |
| M | 1 | 0,075 | 0,050 | 0,060 | 0,167 | 0,313 |
| M | 2 | 0,050 | 0,013 | 0,025 | 0,125 | 0,125 |

**Exemplo:** $a_{ij}^{LL} = \frac{z_{ij}^{LL}}{x_j^{L}}$

$$a_{11}^{LL} = \frac{z_{11}^{LL}}{x_1^{L}} = \frac{150}{1000} = 0{,}150$$

# Exemplo numérico

A partir da matriz A, podemos calcular a **matriz inversa de Leontief** $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11}^{\mathrm{LL}} & b_{12}^{\mathrm{LL}} & b_{13}^{\mathrm{LL}} & b_{11}^{\mathrm{LM}} & b_{12}^{\mathrm{LM}} \\ b_{21}^{\mathrm{LL}} & b_{22}^{\mathrm{LL}} & b_{23}^{\mathrm{LL}} & b_{21}^{\mathrm{LM}} & b_{22}^{\mathrm{LM}} \\ b_{31}^{\mathrm{LL}} & b_{32}^{\mathrm{LL}} & b_{33}^{\mathrm{LL}} & b_{31}^{\mathrm{LM}} & b_{32}^{\mathrm{LM}} \\ b_{11}^{\mathrm{ML}} & b_{12}^{\mathrm{ML}} & b_{13}^{\mathrm{ML}} & b_{11}^{\mathrm{MM}} & b_{12}^{\mathrm{MM}} \\ b_{21}^{\mathrm{ML}} & b_{22}^{\mathrm{ML}} & b_{23}^{\mathrm{ML}} & b_{21}^{\mathrm{MM}} & b_{22}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix}$$

**Matriz inversa de Leontief - Efeito direto + indireto**

| $(I-A)^{-1}$ | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| L 1 | 1,423 | 0,465 | 0,291 | 0,192 | 0,304 |
| L 2 | 0,635 | 1,424 | 0,671 | 0,409 | 0,456 |
| L 3 | 0,638 | 0,537 | 1,336 | 0,250 | 0,311 |
| M 1 | 0,267 | 0,200 | 0,197 | 1,341 | 0,547 |
| M 2 | 0,147 | 0,091 | 0,093 | 0,215 | 1,254 |
| Total | 3,110 | 2,717 | 2,588 | 2,407 | 2,872 |

# Exemplo numérico

**Sistema inter-regional - setor x setor**

| Matriz IP | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | DF Famílias | DF Outros | DT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 150 | 500 | 50 | 25 | 75 | 80 | 120 | 1000 |
| L | 2 | 200 | 100 | 400 | 200 | 100 | 300 | 700 | 2000 |
| L | 3 | 300 | 500 | 50 | 60 | 40 | 15 | 35 | 1000 |
| M | 1 | 75 | 100 | 60 | 200 | 250 | 115 | 400 | 1200 |
| M | 2 | 50 | 25 | 25 | 150 | 100 | 250 | 200 | 800 |
| VA | Trabalho | 125 | 300 | 200 | 365 | 100 | | | 1090 |
| | Outros | 100 | 475 | 215 | 200 | 135 | | | 1125 |
| PT | | 1000 | 2000 | 1000 | 1200 | 800 | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Emprego | 300 | 800 | 350 | 480 | 250 |

**Matriz de coeficientes técnicos (modelo fechado) - Efeito direto**

| Ā | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | $h_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 0,150 | 0,250 | 0,050 | 0,021 | 0,094 | 0,073 |
| L | 2 | 0,200 | 0,050 | 0,400 | 0,167 | 0,125 | 0,275 |
| L | 3 | 0,300 | 0,250 | 0,050 | 0,050 | 0,050 | 0,014 |
| M | 1 | 0,075 | 0,050 | 0,060 | 0,167 | 0,313 | 0,106 |
| M | 2 | 0,050 | 0,013 | 0,025 | 0,125 | 0,125 | 0,229 |
| $h_r$ | | 0,125 | 0,150 | 0,200 | 0,304 | 0,125 | 0,000 |

**Exemplo:** $a^{L}_{n+1,j} = \dfrac{z^{L}_{n+1,j}}{x^{L}_{j}}$

$$a^{L}_{61} = \frac{z^{LL}_{61}}{x^{L}_{1}} = \frac{125}{1000} = 0{,}125$$

**Exemplo:** $a^{L}_{i,n+1} = \dfrac{z^{L}_{i,n+1}}{x^{L}_{n+1}}$

$$a^{L}_{16} = \frac{z^{LL}_{16}}{x^{L}_{6}} = \frac{80}{1090} = 0{,}073$$

# Exemplo numérico

A partir da matriz $\bar{\mathbf{A}}$, podemos calcular a **matriz inversa de Leontief** $(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})^{-1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}} & b^{\mathrm{L}}_{\mathrm{i,n+1}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}} & b^{\mathrm{M}}_{\mathrm{i,n+1}} \\ b^{\mathrm{L}}_{\mathrm{n+1,j}} & \mathrm{b}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{n+1,j}} & b_{\mathbf{n+1,n+1}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}} & \mathbf{h}^{\mathrm{L}}_{\mathbf{c}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}} & \mathbf{h}^{\mathrm{M}}_{\mathbf{c}} \\ \mathbf{h}^{\mathrm{L}}_{\mathbf{r}} & \mathbf{h}^{\mathrm{M}}_{\mathbf{r}} & h \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b^{\mathrm{LL}}_{11} & b^{\mathrm{LL}}_{12} & b^{\mathrm{LL}}_{13} & b^{\mathrm{LM}}_{11} & b^{\mathrm{LM}}_{12} & b^{\mathrm{L}}_{16} \\ b^{\mathrm{LL}}_{21} & b^{\mathrm{LL}}_{22} & b^{\mathrm{LL}}_{23} & b^{\mathrm{LM}}_{21} & b^{\mathrm{LM}}_{22} & b^{\mathrm{L}}_{26} \\ b^{\mathrm{LL}}_{31} & b^{\mathrm{LL}}_{32} & b^{\mathrm{LL}}_{33} & b^{\mathrm{LM}}_{31} & b^{\mathrm{LM}}_{32} & b^{\mathrm{L}}_{36} \\ b^{\mathrm{ML}}_{11} & b^{\mathrm{ML}}_{12} & b^{\mathrm{ML}}_{13} & b^{\mathrm{MM}}_{11} & b^{\mathrm{MM}}_{12} & b^{\mathrm{M}}_{16} \\ b^{\mathrm{ML}}_{21} & b^{\mathrm{ML}}_{22} & b^{\mathrm{ML}}_{23} & b^{\mathrm{MM}}_{21} & b^{\mathrm{MM}}_{22} & b^{M}_{26} \\ b^{\mathrm{L}}_{61} & b^{\mathrm{L}}_{62} & b^{\mathrm{L}}_{63} & b^{\mathrm{M}}_{61} & b^{\mathrm{M}}_{62} & b^{\mathrm{L}}_{66} \end{bmatrix}$$

**Matriz inversa de Leontief (modelo fechado) - Efeito direto + indireto + induzido**

| $(\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})^{-1}$ | | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 1 | 1,671 | 0,689 | 0,526 | 0,474 | 0,547 | 0,495 |
| L | 2 | 1,086 | 1,831 | 1,100 | 0,924 | 0,900 | 0,903 |
| L | 3 | 0,874 | 0,749 | 1,560 | 0,519 | 0,542 | 0,471 |
| M | 1 | 0,528 | 0,436 | 0,446 | 1,638 | 0,804 | 0,522 |
| M | 2 | 0,410 | 0,328 | 0,343 | 0,516 | 1,513 | 0,527 |
| r | | 0,759 | 0,684 | 0,721 | 0,864 | 0,745 | 1,516 |
| Total | | 5,329 | 4,717 | 4,697 | 4,934 | 5,052 | 4,433 |

# Exemplo numérico

**Modelo Aberto:**

**Matriz inversa de Leontief - Efeito direto + indireto**

| $(I-A)^{-1}$ | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| L 1 | 1,423 | 0,465 | 0,291 | 0,192 | 0,304 |
| L 2 | 0,635 | 1,424 | 0,671 | 0,409 | 0,456 |
| L 3 | 0,638 | 0,537 | 1,336 | 0,250 | 0,311 |
| M 1 | 0,267 | 0,200 | 0,197 | 1,341 | 0,547 |
| M 2 | 0,147 | 0,091 | 0,093 | 0,215 | 1,254 |
| Total | 3,110 | 2,717 | 2,588 | 2,407 | 2,872 |

**Modelo Fechado:**

**Matriz inversa de Leontief (modelo fechado) - Efeito direto + indireto + induzido**

| $(I-\bar{A})^{-1}$ | L 1 | L 2 | L 3 | M 1 | M 2 | c |
|---|---|---|---|---|---|---|
| L 1 | 1,671 | 0,689 | 0,526 | 0,474 | 0,547 | 0,495 |
| L 2 | 1,086 | 1,831 | 1,100 | 0,924 | 0,900 | 0,903 |
| L 3 | 0,874 | 0,749 | 1,560 | 0,519 | 0,542 | 0,471 |
| M 1 | 0,528 | 0,436 | 0,446 | 1,638 | 0,804 | 0,522 |
| M 2 | 0,410 | 0,328 | 0,343 | 0,516 | 1,513 | 0,527 |
| r | 0,759 | 0,684 | 0,721 | 0,864 | 0,745 | 1,516 |
| Total | 5,329 | 4,717 | 4,697 | 4,934 | 5,052 | 4,433 |

# Exemplo numérico

**Análise de impacto:**

- variação exógena na demanda final do setor 1 da região L

**Demanda Final**

| | | ΔY |
|---|---|---|
| L | 1 | 100 |
| L | 2 | 0 |
| L | 3 | 0 |
| M | 1 | 0 |
| M | 2 | 0 |

| Coeficiente emprego | | |
|---|---|---|
| L | 1 | 0,30 |
| L | 2 | 0,40 |
| L | 3 | 0,35 |
| M | 1 | 0,40 |
| M | 2 | 0,31 |

$$w_j^e = \frac{e_j}{x_j}$$

| Coeficiente renda | | |
|---|---|---|
| L | 1 | 0,13 |
| L | 2 | 0,15 |
| L | 3 | 0,20 |
| M | 1 | 0,30 |
| M | 2 | 0,13 |

$$r_j^e = \frac{s_j}{x_j}$$

# Exemplo numérico

**Modelo Aberto:**

**Produção**

| | | ΔX |
|---|---|---|
| L | 1 | 142,34 |
| L | 2 | 63,46 |
| L | 3 | 63,83 |
| M | 1 | 26,72 |
| M | 2 | 14,68 |
| Total | | 311,03 |

**Emprego**

| | | ΔE |
|---|---|---|
| L | 1 | 42,70 |
| L | 2 | 25,38 |
| L | 3 | 22,34 |
| M | 1 | 10,69 |
| M | 2 | 4,59 |
| Total | | 105,70 |

**Renda**

| | | ΔR |
|---|---|---|
| L | 1 | 17,79 |
| L | 2 | 9,52 |
| L | 3 | 12,77 |
| M | 1 | 8,13 |
| M | 2 | 1,84 |
| Total | | 50,04 |

**Modelo Fechado:**

**Produção**

| | | ΔX |
|---|---|---|
| L | 1 | 167,109 |
| L | 2 | 108,628 |
| L | 3 | 87,397 |
| M | 1 | 52,842 |
| M | 2 | 41,033 |
| Total | | 457,010 |

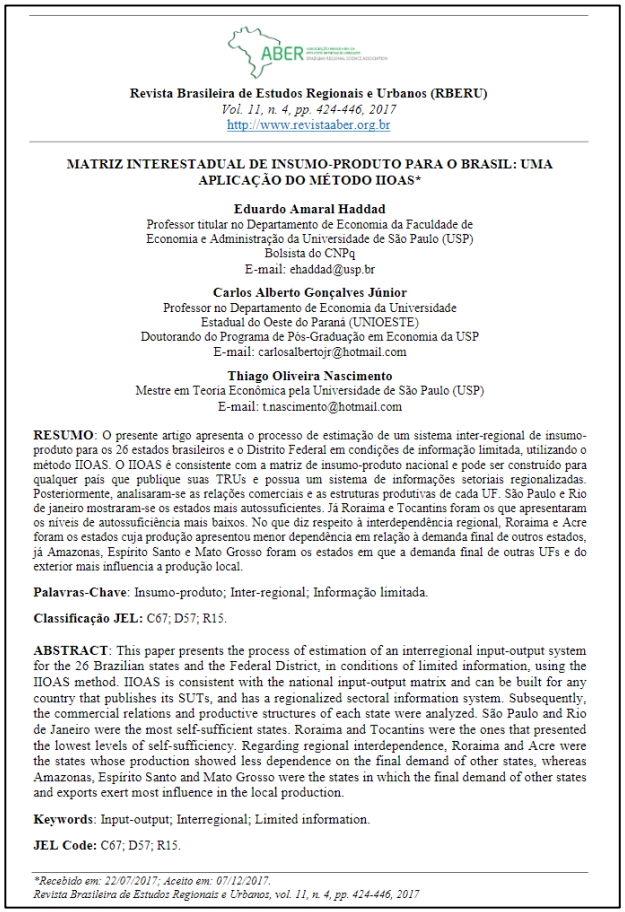
**Emprego**

| | | ΔE |
|---|---|---|
| L | 1 | 50,133 |
| L | 2 | 43,451 |
| L | 3 | 30,589 |
| M | 1 | 21,137 |
| M | 2 | 12,823 |
| Total | | 158,133 |

**Renda**

| | | ΔR |
|---|---|---|
| L | 1 | 20,89 |
| L | 2 | 16,29 |
| L | 3 | 17,48 |
| M | 1 | 16,07 |
| M | 2 | 5,13 |
| Total | | 75,864 |

# Matriz Interestadual de Insumo-Produto



**Revista Brasileira de Estudos Regionais e Urbanos (RBERU)**
*Vol. 11, n. 4, pp. 424-446, 2017*
http://www.revistaaber.org.br

**MATRIZ INTERESTADUAL DE INSUMO-PRODUTO PARA O BRASIL: UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO IIOAS***

**Eduardo Amaral Haddad**
Professor titular no Departamento de Economia da Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo (USP)
Bolsista do CNPq
E-mail: ehaddad@usp.br

**Carlos Alberto Gonçalves Júnior**
Professor no Departamento de Economia da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Economia da USP
E-mail: carlosalbertojr@hotmail.com

**Thiago Oliveira Nascimento**
Mestre em Teoria Econômica pela Universidade de São Paulo (USP)
E-mail: t.nascimento@hotmail.com

**RESUMO**: O presente artigo apresenta o processo de estimação de um sistema inter-regional de insumo-produto para os 26 estados brasileiros e o Distrito Federal em condições de informação limitada, utilizando o método IIOAS. O IIOAS é consistente com a matriz de insumo-produto nacional e pode ser construído para qualquer país que publique suas TRUs e possua um sistema de informações setoriais regionalizadas. Posteriormente, analisaram-se as relações comerciais e as estruturas produtivas de cada UF. São Paulo e Rio de janeiro mostraram-se os estados mais autossuficientes. Já Roraima e Tocantins foram os que apresentaram os níveis de autossuficiência mais baixos. No que diz respeito à interdependência regional, Roraima e Acre foram os estados cuja produção apresentou menor dependência em relação à demanda final de outros estados, já Amazonas, Espírito Santo e Mato Grosso foram os estados em que a demanda final de outras UFs e do exterior mais influencia a produção local.

**Palavras-Chave**: Insumo-produto; Inter-regional; Informação limitada.

**Classificação JEL:** C67; D57; R15.

**ABSTRACT**: This paper presents the process of estimation of an interregional input-output system for the 26 Brazilian states and the Federal District, in conditions of limited information, using the IIOAS method. IIOAS is consistent with the national input-output matrix and can be built for any country that publishes its SUTs, and has a regionalized sectoral information system. Subsequently, the commercial relations and productive structures of each state were analyzed. São Paulo and Rio de Janeiro were the most self-sufficient states. Roraima and Tocantins were the ones that presented the lowest levels of self-sufficiency. Regarding regional interdependence, Roraima and Acre were the states whose production showed less dependence on the final demand of other states, whereas Amazonas, Espírito Santo and Mato Grosso were the states in which the final demand of other states and exports exert most influence in the local production.

**Keywords**: Input-output; Interregional; Limited information.

**JEL Code:** C67; D57; R15.

**Recebido em: 22/07/2017; Aceito em: 07/12/2017.*
*Revista Brazileira de Estudos Regionais e Urbanos, vol. 11, n. 4, pp. 424-446, 2017*

Sistema inter-regional de insumo-produto para os 26 estados brasileiros e o Distrito Federal com abertura para 68 setor.

Estimada pelo método IIOAS a partir de dados das TRUs.

Disponível na Revista Brasileira de Estudos Regionais e Urbanos.

# Atividade: Avaliação de Impacto

Com base na "Matriz PRxRB de Insumo-Produto, 2011":

A. Calcule a matriz de coeficientes técnicos e a matriz inversa de Leontief para o modelo regional (Paraná) e para o modelo inter-regional (Paraná e Restante do Brasil).

B. Com base nos cálculos anteriores e nas especificações do projeto de investimento descrito a seguir:

i. Projete os impactos sobre produção, emprego, renda, valor adicionado e impostos da fase de implementação e operação;

ii. Avalie os resultados globais das estimativas de impacto sobre cada variável;

iii. Considerando o valor total do investimento, calcule o efeito multiplicador para cada variável;

iv. Compare os resultados do modelo regional com os do modelo inter-regional.

# Informações sobre o projeto

SETOR DO EMPREENDIMENTO: PRODUTOS ALIMENTARES NO PARANÁ

Dados do Projeto de Investimento

| PERÍODO DE IMPLANTAÇÃO | R$ Milhões |
|---|---|
| Terrenos | 5,00 |
| Construção civil | 50,00 |
| Máquinas e Equipamentos | 70,00 |
| Salários da mão de obra (anual) | 25,00 |
| **Total** | **150,00** |

Comprado:

| no Paraná | no Restante do Brasil | no Exterior |
|---|---|---|
| 100,0% | | |
| 60,0% | 20,0% | 20,0% |
| 30,0% | 40,0% | 30,0% |
| 100,0% | | |

| PERÍODO DE OPERAÇÃO | R$ Milhões |
|---|---|
| Valor do faturamento (100% capacidade instalada anual) | **250,00** |
| Salários da mão de obra (anual) | **38,00** |

# Referências

**Básicas**:

MILLER, R. E.; BLAIR, P. D. **Input-Output Analysis**: Foundations and Extensions. Prentice-Hall, 2009.

GUILHOTO, J. J. M. **Análise de Insumo-produto:** teoria e fundamentos. 2011. (MPRA Paper No. 32566)

VALE, V. A.; PEROBELLI, F. S. **Análise de Insumo-Produto: teoria e aplicações no R**. NEDUR/LATES. Curitiba, PR: Edição Independente, 2020.

# Referências

**Complementares**:


HADDAD, E. **Modelos Aplicados de Equilíbrio Geral** – EAE 5918. Núcleo de Economia Regional e Urbana da Universidade de São Paulo, 2019.

HADDAD, E.; VALE, V. A. **Curso de Métodos de Análise Regional e Inter-regional.** Núcleo de Economia Regional e Urbana da Universidade de São Paulo. Programa de Extensão Nereides, 2017.

HADDAD, E. A.; GONÇALVES Jr., C. A.; NASCIMENTO, T. B. Matriz Interestadual de Insumo-Produto para o Brasil: Uma Aplicação do Método IIOAS. **Revista Brasileira de Estudos Regionais e Urbanos**, v. 11, n. 4, pp. 424-446, 2017.

# Exemplo:
# Estado de São Paulo na economia Brasileira e mundial

Fluxos regionais e externos

Brasil, 1996

| Fluxos | | São Paulo | | Resto do Brasil | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *R$ bi* | *% VA* | *R$ bi* | *% VA* |
| Inter-regionais | Exportações | 113,244 | 49.0 | 77,725 | 16.7 |
| | Importações | 77,725 | 33.7 | 113,244 | 24.4 |
| | Saldo | 35,519 | 15.4 | 35,519 | -7.7 |
| Externos | Exportações | 19,909 | 8.6 | 34,401 | 7.4 |
| | Importações | 25,470 | 11.0 | 53,701 | 11.6 |
| | Saldo | -5,561 | 2.4 | -19,300 | 4.2 |

VA: Valor Adicionado regional

fonte: Informações FIPE, n. 245, fevereiro/2001

# Matriz de Insumo-Produto Inter-regional São Paulo/Resto do Brasil, 1996 – R$ milhões

$z_{11}^{LL}$ $Y_1^L$ $X_1^L$

| | | São Paulo | | | | Resto do Brasil | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | | Y | | X |
| SP | 1 | 522 | 2268 | 1 | 163 | 603 | 1764 | 0 | 136 | | 12661 | | 18117 |
| | 2 | 1972 | 40900 | 7784 | 6541 | 3049 | 21177 | 6918 | 8562 | | 88681 | | 185585 |
| | 3 | 305 | 3487 | 2077 | 1721 | 1089 | 6001 | 4337 | 2600 | | 70862 | | 92480 |
| | 4 | 289 | 6969 | 4897 | 29029 | 401 | 4706 | 2525 | 12862 | + | 92612 | = | 154291 |
| RB | 1 | 1782 | 7736 | 2 | 557 | 11658 | 34105 | 5 | 2628 | | 21284 | | 79757 |
| | 2 | 980 | 22890 | 8492 | 2452 | 8069 | 89477 | 23804 | 11353 | | 143282 | | 310800 |
| | 3 | 97 | 1198 | 1522 | 1583 | 568 | 3767 | 5688 | 5995 | | 151473 | | 171892 |
| | 4 | 127 | 2910 | 2630 | 10278 | 1602 | 14413 | 12890 | 46943 | | 247003 | | 338796 |
| VA | | 11835 | 86094 | 63675 | 99711 | 51796 | 116061 | 112078 | 243914 | | | | |
| | | | | | | = | | | | | | | |
| X | | 18117 | 185585 | 92480 | 154291 | 79757 | 310800 | 171892 | 338796 | | | | |

$X_1^L$

**1** Agropecuária
**2** indústria Transformação
**3** Comércio, Transportes e Construção Civil
**4** Serviços

**VA** Valor Adicionado
**Y** Demanda Final
**X** Produção

# Matriz de Insumo-Produto Inter-regional São Paulo/Resto do Brasil, **coeficientes técnicos**

| | | São Paulo | | | | Resto do Brasil | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 0.029 | 0.012 | 0.000 | 0.001 | 0.008 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| | 2 | 0.109 | 0.220 | 0.084 | 0.042 | 0.038 | 0.068 | 0.040 | 0.025 |
| **SP** | 3 | 0.017 | 0.019 | 0.022 | 0.011 | 0.014 | 0.019 | 0.025 | 0.008 |
| | 4 | 0.016 | 0.038 | 0.053 | 0.188 | 0.005 | 0.015 | 0.015 | 0.038 |
| | 1 | 0.098 | 0.042 | 0.000 | 0.004 | 0.146 | 0.110 | 0.000 | 0.008 |
| **RB** | 2 | 0.054 | 0.123 | 0.092 | 0.016 | 0.101 | 0.288 | 0.138 | 0.034 |
| | 3 | 0.005 | 0.006 | 0.016 | 0.010 | 0.007 | 0.012 | 0.033 | 0.018 |
| | 4 | 0.007 | 0.016 | 0.028 | 0.067 | 0.020 | 0.046 | 0.075 | 0.139 |

$$= \begin{bmatrix} A^{LL} & A^{LM} \\ A^{ML} & A^{MM} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{LL} = \frac{z_{ij}^{LL}}{X_j^L}, \quad a_{ij}^{MM} = \frac{z_{ij}^{MM}}{X_j^M} \rightarrow \text{coeficiente de insumo regional}$$

$$a_{ij}^{ML} = \frac{z_{ij}^{ML}}{X_j^L}, \quad a_{ij}^{LM} = \frac{z_{ij}^{LM}}{X_j^M} \rightarrow \text{coeficiente de comércio inter - regional}$$

# Modelo inter-regional

| | | São Paulo | | | | Resto do Brasil | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 0.029 | 0.012 | 0.000 | 0.001 | 0.008 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| | 2 | 0.109 | 0.220 | 0.084 | 0.042 | 0.038 | 0.068 | 0.040 | 0.025 |
| **SP** | 3 | 0.017 | 0.019 | 0.022 | 0.011 | 0.014 | 0.019 | 0.025 | 0.008 |
| | 4 | 0.016 | 0.038 | 0.053 | 0.188 | 0.005 | 0.015 | 0.015 | 0.038 |
| | 1 | 0.098 | 0.042 | 0.000 | 0.004 | 0.146 | 0.110 | 0.000 | 0.008 |
| **RB** | 2 | 0.054 | 0.123 | 0.092 | 0.016 | 0.101 | 0.288 | 0.138 | 0.034 |
| | 3 | 0.005 | 0.006 | 0.016 | 0.010 | 0.007 | 0.012 | 0.033 | 0.018 |
| | 4 | 0.007 | 0.016 | 0.028 | 0.067 | 0.020 | 0.046 | 0.075 | 0.139 |

$$= \begin{bmatrix} A^{LL} & A^{LM} \\ A^{ML} & A^{MM} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X^{L} \\ X^{M} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 18117 \\ 185585 \\ 92480 \\ 154291 \\ \hline 79757 \\ 310800 \\ 171892 \\ 338796 \end{array} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y^{L} \\ Y^{M} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 12661 \\ 88681 \\ 70862 \\ 92612 \\ \hline 21284 \\ 143282 \\ 151473 \\ 247003 \end{array}$$

$$\begin{cases} X = (I - A)^{-1} Y \\ X = B.Y \\ B = \begin{bmatrix} B^{LL} & B^{LM} \\ B^{ML} & B^{MM} \end{bmatrix} \end{cases}$$

# Modelo inter-regional

$$B = \begin{bmatrix} B^{LL} & B^{LM} \\ B^{ML} & B^{MM} \end{bmatrix}$$

| | | São Paulo | | | | Resto do Brasil | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 1.034 | 0.019 | 0.003 | 0.003 | 0.012 | 0.012 | 0.003 | 0.002 |
| | 2 | 0.170 | 1.323 | 0.135 | 0.080 | 0.083 | 0.151 | 0.085 | 0.052 |
| **SP** | 3 | 0.027 | 0.034 | 1.031 | 0.018 | 0.023 | 0.037 | 0.035 | 0.013 |
| | 4 | 0.035 | 0.072 | 0.080 | 1.243 | 0.019 | 0.043 | 0.035 | 0.060 |
| | 1 | 0.145 | 0.100 | 0.030 | 0.017 | 1.202 | 0.199 | 0.036 | 0.023 |
| **RB** | 2 | 0.136 | 0.256 | 0.170 | 0.055 | 0.194 | 1.474 | 0.233 | 0.075 |
| | 3 | 0.011 | 0.015 | 0.023 | 0.017 | 0.013 | 0.024 | 1.041 | 0.024 |
| | 4 | 0.027 | 0.048 | 0.055 | 0.103 | 0.043 | 0.093 | 0.109 | 1.174 |
| | $\sum$ | **1.584** | **1.867** | **1.526** | **1.536** | **1.590** | **2.034** | **1.577** | **1.423** |

# Modelo inter-regional

$$Y_N = Y + DY \Rightarrow X_N = B.Y_N$$

**Acréscimo de R$ 100 milhões nas vendas para demanda final da indústria em São Paulo**

| | | *Y* | *DY* | *YN* | *X* | *XN = B.YN* | *DX* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 12,661 | 0 | 12,661 | 18,117 | 18,119 | 1.90 |
| *São Paulo* | 2 | 88,681 | 100 | 88,781 | 185,585 | 185,717 | 132.25 |
| | 3 | 70,862 | 0 | 70,862 | 92,480 | 92,483 | 3.38 |
| | 4 | 92,612 | 0 | 92,612 | 154,291 | 154,298 | 7.17 |
| | 1 | 21,284 | 0 | 21,284 | 79,757 | 79,767 | 10.04 |
| *Resto do* | 2 | 143,282 | 0 | 143,282 | 310,800 | 310,825 | 25.59 |
| *Brasil* | 3 | 151,473 | 0 | 151,473 | 171,892 | 171,894 | 1.51 |
| | 4 | 247,003 | 0 | 247,003 | 338,796 | 338,801 | 4.83 |
| | $\sum$ | **827,859** | **100** | **827,959** | **1,351,718** | **1,351,905** | **186.68** |

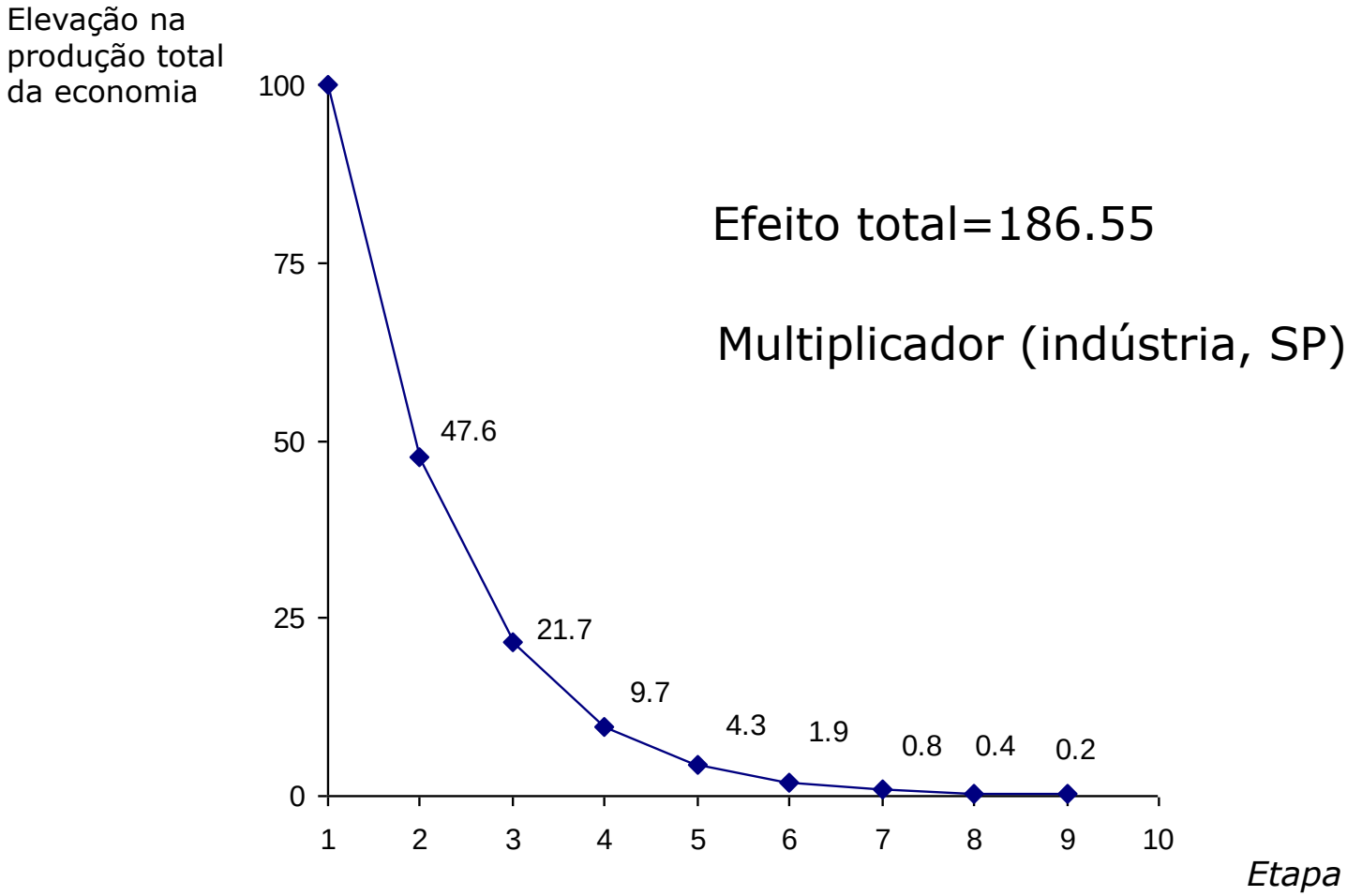
Multiplicador (Indústria, SP) = DX/DN = 186.68/100 = 1.867

# Modelo inter-regional

**Efeito no nível de atividade da economia de um acréscimo de R$ 100 milhões nas vendas para demanda final da indústria (2) em São Paulo**

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1.22 | 0.41 | 0.16 | 0.06 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 1.90 |
| *São Paulo* | 2 | 100 | 22.04 | 6.37 | 2.26 | 0.90 | 0.38 | 0.17 | 0.07 | 0.03 | 132.23 |
| | 3 | 0 | 1.88 | 0.84 | 0.37 | 0.16 | 0.07 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 3.37 |
| | 4 | 0 | 3.76 | 1.93 | 0.84 | 0.36 | 0.16 | 0.07 | 0.03 | 0.01 | 7.16 |
| | 1 | 0 | 4.17 | 3.03 | 1.55 | 0.72 | 0.32 | 0.14 | 0.06 | 0.03 | 10.02 |
| *Resto do* | 2 | 0 | 12.33 | 7.13 | 3.39 | 1.53 | 0.68 | 0.30 | 0.13 | 0.06 | 25.55 |
| *Brasil* | 3 | 0 | 0.65 | 0.45 | 0.23 | 0.11 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 1.51 |
| | 4 | 0 | 1.57 | 1.58 | 0.90 | 0.43 | 0.20 | 0.09 | 0.04 | 0.02 | 4.82 |
| | $\sum$ | 100 | 47.61 | 21.74 | 9.70 | 4.28 | 1.88 | 0.83 | 0.36 | 0.16 | **186.55** |

# Modelo inter-regional

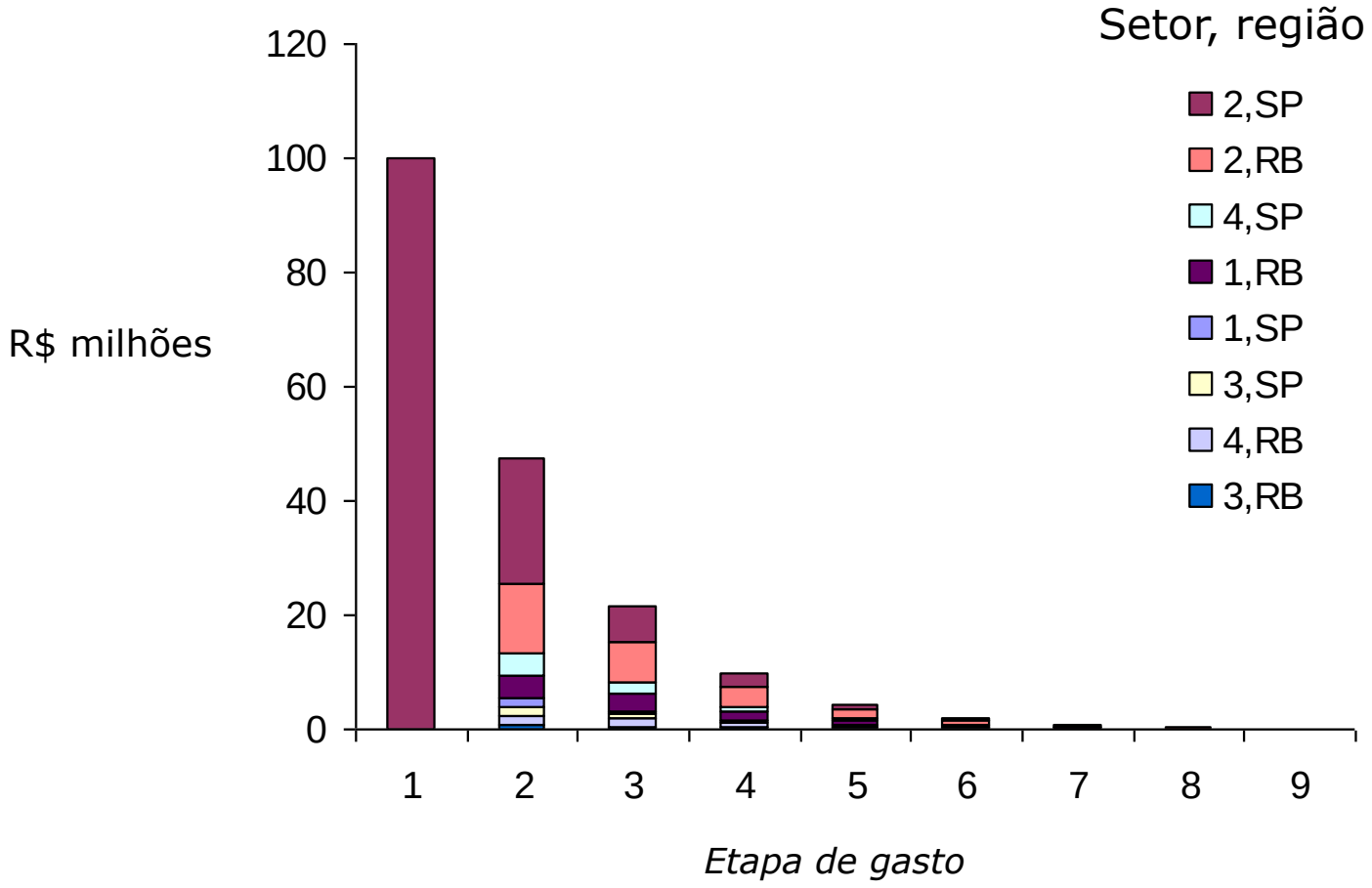



Efeito total=186.55

Multiplicador (indústria, SP) = 1.865

# Modelo inter-regional

**Efeito no nível de atividade da economia de um acréscimo de R$ 100 milhões nas vendas para demanda final da indústria (2) em São Paulo**



# Modelo inter-regional

**Efeito no nível de atividade da economia de um acréscimo de R$ 100 milhões nas vendas para demanda final da indústria em São Paulo**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 144.70 | 77.51% |
| *São Paulo* | Indústria | | 91.38% |
| | Serviços | | 4.95% |
| | | 41.98 | 22.49% |
| *Resto do Brasil* | Indústria | | 60.87% |
| | Serviços | | 11.51% |

# Modelo inter-regional

**Decomposição dos multiplicadores**

| | | Simples | | Líquida Injeção inicial | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Local | Externo | Local | Externo |
| *São Paulo* | 1 | 79.9% | 20.1% | 45.4% | 54.6% |
| | 2 | 77.5% | 22.5% | 51.6% | 48.4% |
| | 3 | 81.9% | 18.1% | 47.4% | 52.6% |
| | 4 | 87.5% | 12.5% | 64.2% | 35.8% |
| *Resto do Brasil* | 1 | 91.4% | 8.6% | 76.8% | 23.2% |
| | 2 | 88.0% | 12.0% | 76.5% | 23.5% |
| | 3 | 90.0% | 10.0% | 72.6% | 27.4% |
| | 4 | 91.1% | 8.9% | 69.9% | 30.1% |

# Modelo regional *vs*. Modelo inter-regional

**Multiplicadores Simples da Produção**
**Estado de São Paulo - 1996**

| | Modelo de Insumo-Produto | | |
|---|---|---|---|
| | Regional | Inter-regional | Diferença |
| Agropecuária | 1.23 | 1.58 | 22% |
| Indústria | 1.39 | 1.87 | 25% |
| Com. e Transp. | 1.21 | 1.53 | 20% |
| Serviços | 1.32 | 1.54 | 14% |